

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Álvaro Azevedo

<http://www.fe.up.pt/~alvaro>

Novembro 2000

Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto

1

Caso mais simples

- ◆ Método dos deslocamentos
- ◆ Comportamento linear elástico
- ◆ Pequenas deformações
- ◆ Carregamento quase-estático

2

Estudos mais complexos

- ◆ Comportamento não-linear material
- ◆ Grandes deformações
- ◆ Acções/comportamento dinâmico
- ◆ Instabilidade
- ◆ Interação sólido-fluido

3

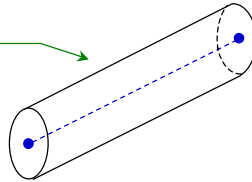
Tipos de estrutura

- ◆ Reticuladas (treliças/pórticos)
- ◆ Laminares (paredes, lajes e cascas)
- ◆ Sólidos tridimensionais

4

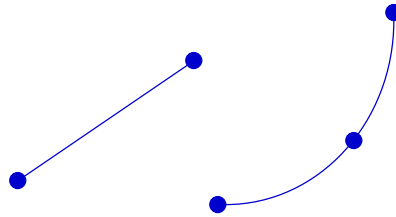
Estruturas reticuladas

Barras prismáticas



◆ Treliça 3D

◆ Pórtico 3D



Elementos de 2 ou 3 nós

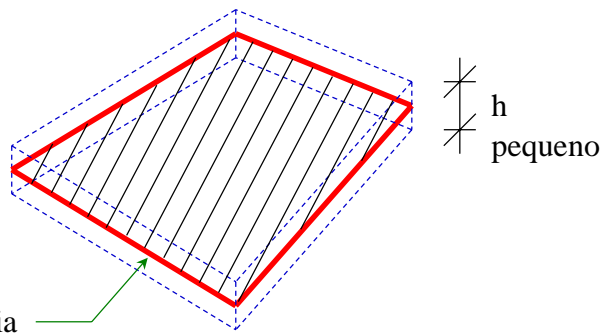
5

Estruturas laminares

◆ Paredes

◆ Lajes

◆ Cascas



superfície média

6

Estado plano de tensão

- ◆ Estrutura laminar
- ◆ Superfície média plana
- ◆ Acções/esforços de membrana, ie, paralelos à superfície média

Ex: parede (*shear wall*)

7

Laje

- ◆ Estrutura laminar
- ◆ Superfície média plana
- ◆ Acções normais à superfície média
- ◆ Comportamento à flexão

Ex: laje fungiforme

8

Casca

- ◆ Estrutura laminar
- ◆ Superfície média qualquer
- ◆ Acções quaisquer
- ◆ Comportamento de membrana e flexão

Ex: cúpula esférica, edifício túnel

9

Estado plano de deformação

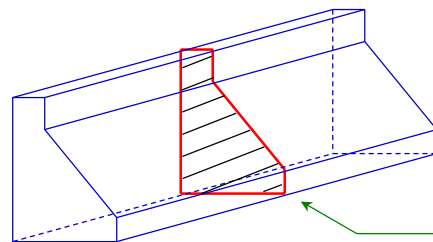
- ◆ Sólido estudado como um problema plano
- ◆ Superfície média plana
- ◆ Acções paralelas à superfície média
- ◆ Deformações desprezáveis na direcção normal à superfície média (grande dimensão ou impedimento)

Ex: barragem gravidade, muro de suporte

10

Estado plano de deformação (cont.)

- ◆ Supõe-se que todos os deslocamentos são paralelos à superfície média
- ◆ Tensão normal à superfície média depende apenas das restantes tensões



Só a superfície
média é
discretizada

superfície média

11

Estado axissimétrico

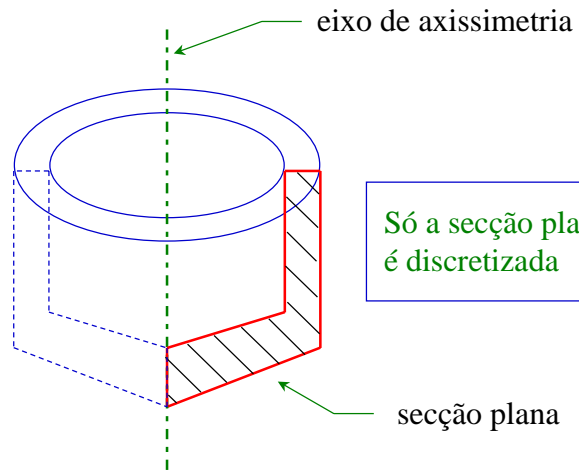
- ◆ Sólido de revolução
- ◆ Estuda-se uma secção plana
- ◆ Acções axissimétricas
- ◆ Deformações axissimétricas

Ex: depósito circular sujeito à
pressão hidrostática

12

Estado axissimétrico (cont.)

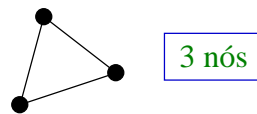
Depósito circular



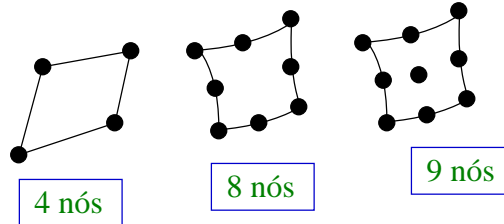
13

Elem. finitos para problemas planos

Elementos triangulares



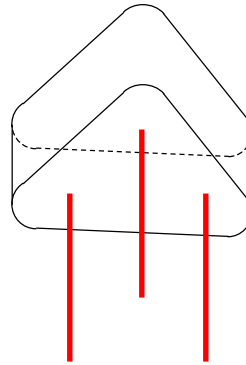
Elementos isoparamétricos



14

Caso geral

Sólido tridimensional

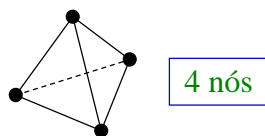


Ex: maciço de encabeçamento de estacas

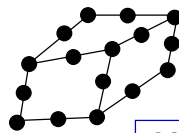
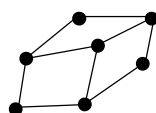
15

Elementos finitos para sólidos 3D

Elementos tetraédricos



Elementos isoparamétricos



16

Acções em cada caso de carga

Nós	<ul style="list-style-type: none">•Forças concentradas *•Deslocamentos prescritos *
Elementos	<ul style="list-style-type: none">•Gravíticas *•Distribuídas *•Concentradas *•Térmicas

* Possui componentes em correspondência com os graus de liberdade (referencial depende do tipo de elemento)

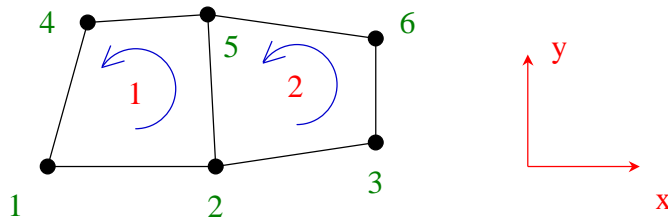
17

Resolução de um problema

- ◆ Leitura e validação dos dados
- ◆ Cálculo das matrizes de rigidez dos elementos
- ◆ Cálculo das acções nodais equivalentes
- ◆ Assemblagem na matriz de rigidez global
- ◆ Introdução das condições fronteira
- ◆ Resolução do sistema de equações
- ◆ Cálculo dos esforços/tensões nos elementos

18

Dados - geometria



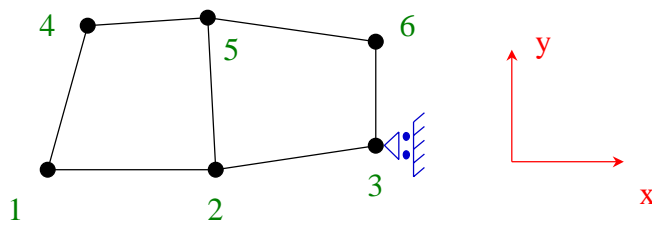
```

...
2  7 9    2 3 6 5 # Elemento 2 (material 7; secção 9)
...
...
5  -8.34  2.96 # Coordenadas (xy) do nó 5
...

```

19

Dados - apoios



```

...
#      x y
4  3   1 0 # 4º apoio - nó 3
...

```

1 - fixo
0 - livre

20

Dados - materiais, secções tipo

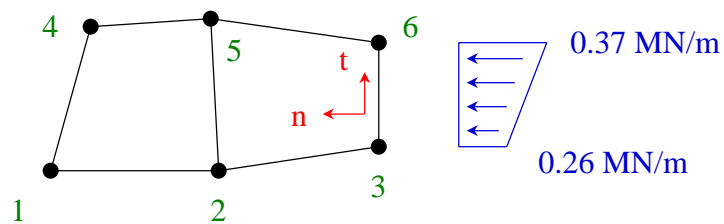
```

...
7 200000      0.3      25e-3      1e-5 # Material 7
# Mód. Young Coef. Poisson Peso esp. Coef. dilat.
# (MPa)      (adim.)      (MN/m³) (°C⁻¹)
...
...
9 # Secção tipo 9 - espessuras
1 0.35 # metros
2 0.45
3 0.45
4 0.35
...

```

21

Dados - acções



```

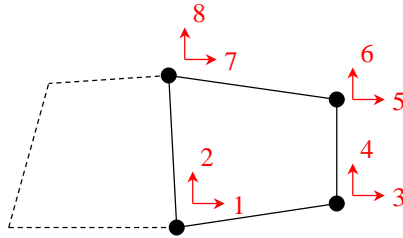
...
3 2 # 3ª carga distribuída - elemento 2
#      (t) (n)
# Nó 3:
3 0.0 0.26 # MN/m
# Nó 6:
6 0.0 0.37
...

```

t - tangencial
n - normal

22

Matriz de rigidez de um elemento

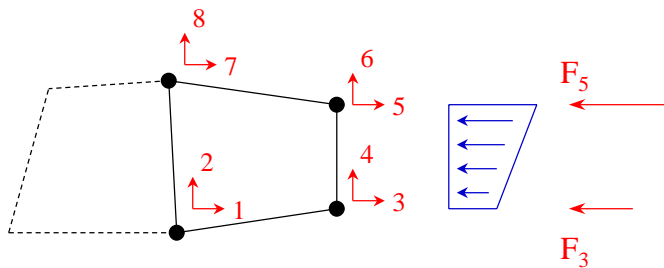


$$\begin{aligned}
 & [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{18} \\ \vdots & K_{ij} & \vdots \\ K_{81} & \dots & K_{88} \end{bmatrix} \\
 & (8 \times 8) \\
 & (\text{simétrica})
 \end{aligned}$$

K_{ij} → força aplicada segundo j quando o elemento está sujeito apenas a um deslocamento unitário segundo i

23

Acções nodais equivalentes

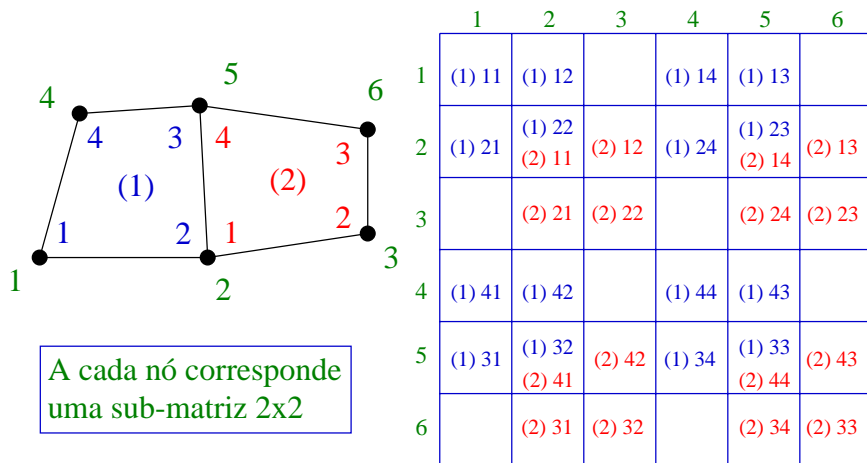


$$\begin{aligned}
 & [F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_8 \end{bmatrix} \\
 & (8 \times 1)
 \end{aligned}$$

$[F]$ → forças nodais equivalentes a acções complexas

24

Assemblagem - mat. rig. global



	1	2	3	4	5	6
1	(1) 11	(1) 12		(1) 14	(1) 13	
2	(1) 21	(1) 22 (2) 11	(2) 12	(1) 24	(1) 23 (2) 14	(2) 13
3		(2) 21	(2) 22		(2) 24	(2) 23
4	(1) 41	(1) 42		(1) 44	(1) 43	
5	(1) 31	(1) 32 (2) 41	(2) 42	(1) 34	(1) 33 (2) 44	(2) 43
6		(2) 31	(2) 32		(2) 34	(2) 33

25

Introdução das condições fronteira

- ◆ Graus de liberdade com o deslocamento prescrito (nulo ou não nulo)
- ◆ A lista de deslocamentos prescritos não depende do caso de carga
- ◆ O valor do deslocamento prescrito pode variar com o caso de carga

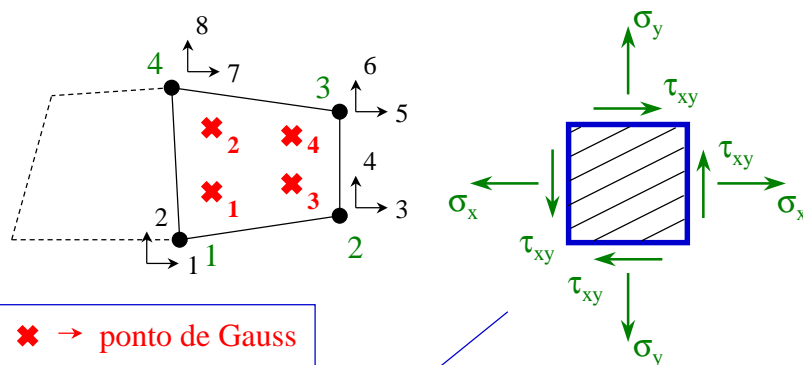
26

Resolução do sistema de equações

Método directo	<ul style="list-style-type: none">•Eliminação de Gauss•Malhas de pequena e média dimensão
Método iterativo	<ul style="list-style-type: none">•Gradientes conjugados•Malhas de grande dimensão•Mais de 5000 equações

27

Cálculo das tensões num elemento

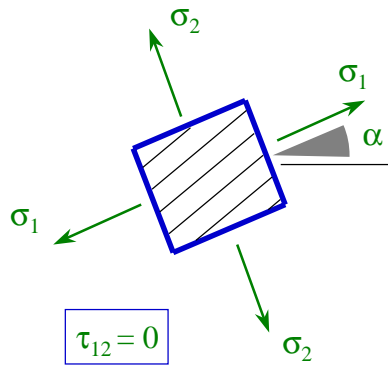


Elemento infinitesimal localizado em cada ponto de Gauss

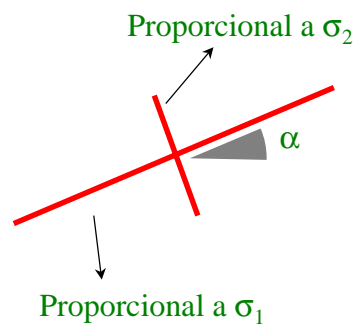
28

Cálculo das tensões (cont.)

Tensões principais

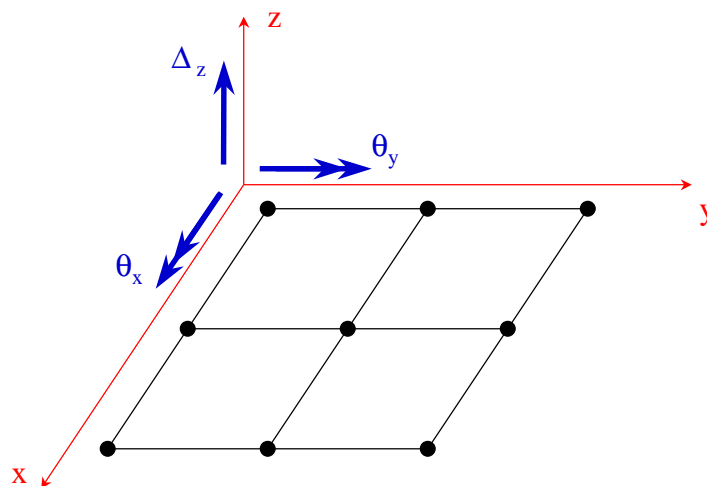


Representação gráfica por cruzetas



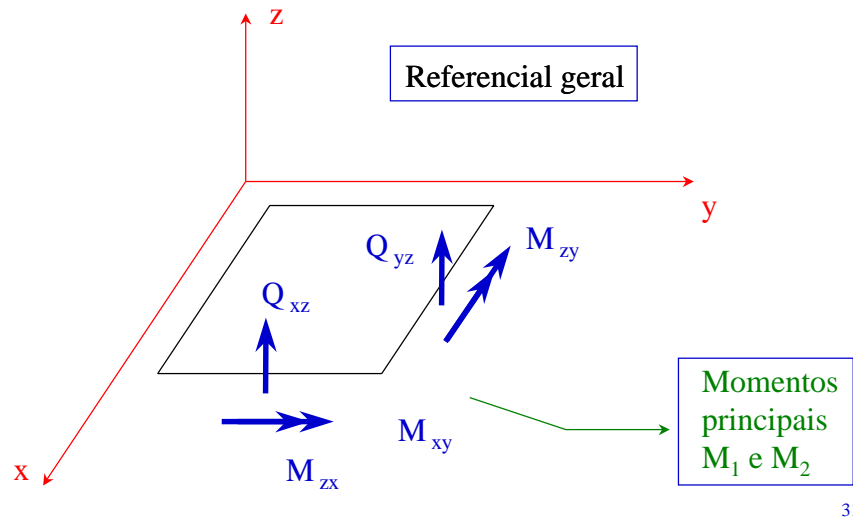
29

Lajes - graus de liberdade

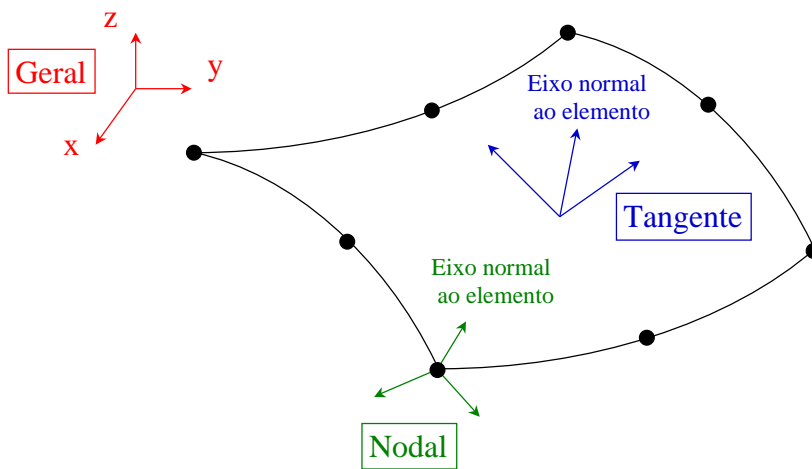


30

Lajes - esforços em pontos de Gauss

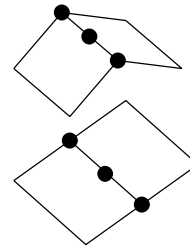


Cascas - referenciais



Cascas - graus de liberdade

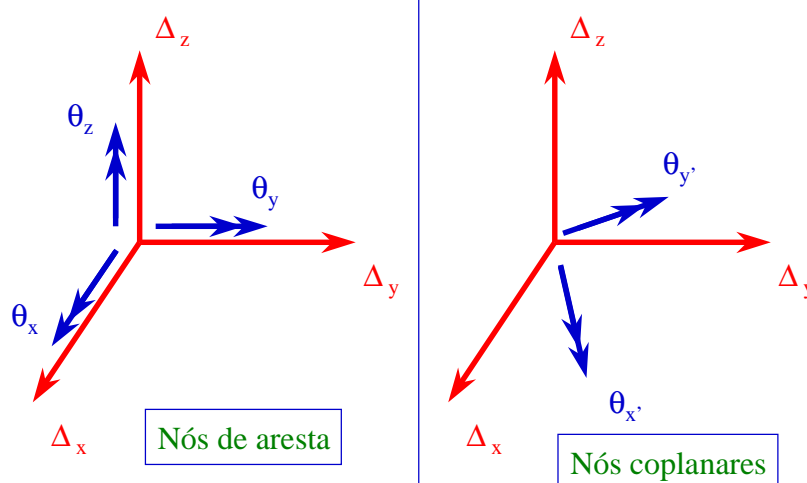
- ◆ Deslocamentos nodais sempre no referencial geral
- ◆ Rotações nodais:
 - Nós de aresta → referencial geral
 - Nós coplanares → referencial nodal



Em nós coplanares só existem duas rotações

33

Cascas - graus de liberdade (cont.)



34

Cascas - esforços em p. de Gauss

- ◆ Referencial tangente
- ◆ Esforços de membrana e de flexão:

$N_{x'}$	$M_{z'y'}$	$Q_{x'z'}$
$N_{y'}$	$M_{z'x'}$	$Q_{y'z'}$
$N_{x'y'}$	$M_{x'y'}$	