

CONDENSAÇÃO ESTÁTICA

Considere-se o pórtico plano representado na Fig. 1, sujeito a acções concentradas e distribuídas

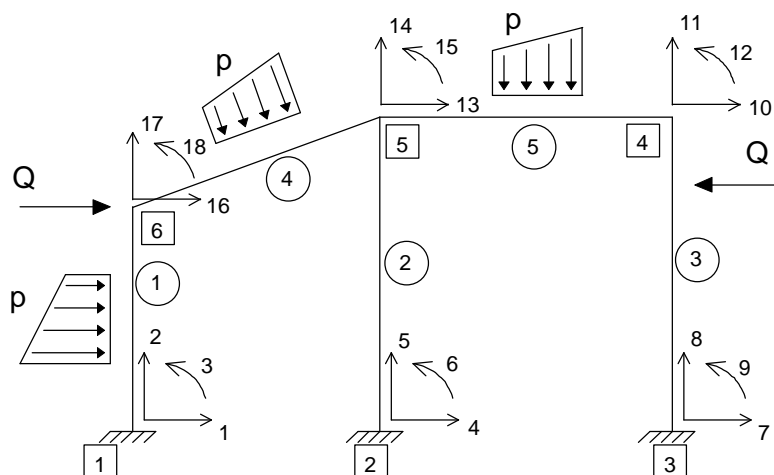


Fig. 1 - Pórtico plano.

Considere-se agora o mesmo pórtico dividido em duas subestruturas

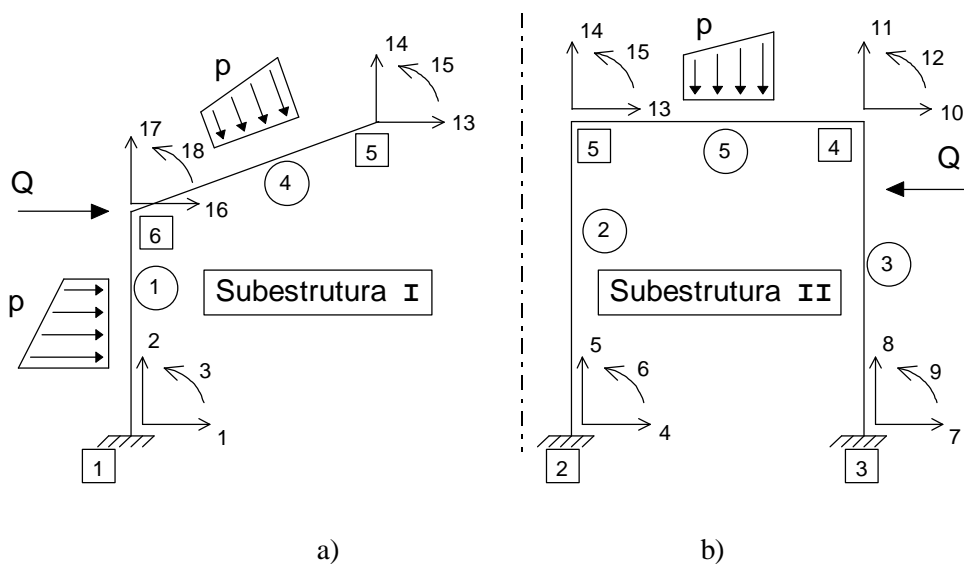


Fig. 2 - Pórtico plano - divisão em subestruturas.

Considerando apenas a subestrutura I, tem-se a seguinte numeração de nós e barras

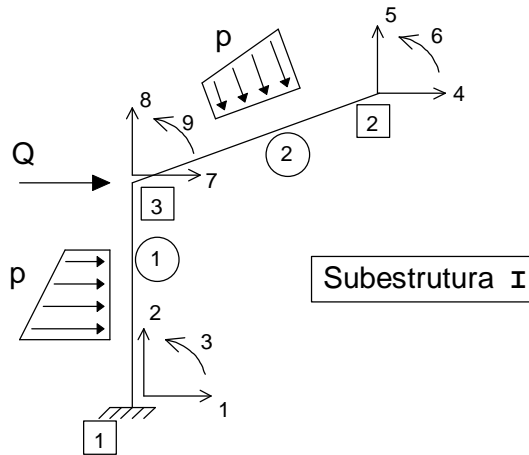


Fig. 3 - Pórtico plano - subestrutura I.

A matriz de rigidez, deslocamentos nodais e forças nodais equivalentes às acções exteriores encontram-se relacionados da seguinte forma

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \tag{1}$$

Nesta expressão figuram os seguintes vectores e matrizes

\underline{K}	(9 x 9)	Matriz de rigidez global da subestrutura I. Resulta da assemblagem das matrizes de rigidez (6 x 6) das duas barras.
\underline{a}	(9 x 1)	Deslocamentos dos nós da subestrutura I.
\underline{F}	(9 x 1)	Vector das forças nodais equivalentes às acções concentradas e distribuídas. Resulta da assemblagem dos vectores solicitação (6 x 1) das duas barras.

A equação (1) corresponde à seguinte equação matricial

$$\rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} & k_{39} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} & k_{49} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & k_{59} \\ k_{16} & k_{26} & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} & k_{67} & k_{68} & k_{69} \\ k_{17} & k_{27} & k_{37} & k_{47} & k_{57} & k_{67} & k_{77} & k_{78} & k_{79} \\ k_{18} & k_{28} & k_{38} & k_{48} & k_{58} & k_{68} & k_{78} & k_{88} & k_{89} \\ k_{19} & k_{29} & k_{39} & k_{49} & k_{59} & k_{69} & k_{79} & k_{89} & k_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Multiplicando a linha 9 por coeficientes apropriados e adicionando-a às restantes linhas, é possível transformar a equação (2) na seguinte

$$\begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} & k'_{15} & k'_{16} & k'_{17} & k'_{18} & 0 \\ k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} & k'_{24} & k'_{25} & k'_{26} & k'_{27} & k'_{28} & 0 \\ k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} & k'_{34} & k'_{35} & k'_{36} & k'_{37} & k'_{38} & 0 \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & k'_{44} & k'_{45} & k'_{46} & k'_{47} & k'_{48} & 0 \\ k'_{51} & k'_{52} & k'_{53} & k'_{54} & k'_{55} & k'_{56} & k'_{57} & k'_{58} & 0 \\ k'_{61} & k'_{62} & k'_{63} & k'_{64} & k'_{65} & k'_{66} & k'_{67} & k'_{68} & 0 \\ k'_{71} & k'_{72} & k'_{73} & k'_{74} & k'_{75} & k'_{76} & k'_{77} & k'_{78} & 0 \\ k'_{81} & k'_{82} & k'_{83} & k'_{84} & k'_{85} & k'_{86} & k'_{87} & k'_{88} & 0 \\ k_{19} & k_{29} & k_{39} & k_{49} & k_{59} & k_{69} & k_{79} & k_{89} & k_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \\ F'_5 \\ F'_6 \\ F'_7 \\ F'_8 \\ F_9 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Os termos k'_{12} e k'_{21} apresentam as seguintes expressões

$$k'_{12} = k_{12} - (k_{19}/k_{99})k_{29} \quad (4)$$

$$k'_{21} = k_{12} - (k_{29}/k_{99})k_{19} \quad (5)$$

Assim se verifica que

$$k'_{21} = k'_{12} \quad (6)$$

De um modo mais genérico tem-se a seguinte expressão para k'_{ij}

$$k'_{ij} = k_{ij} - (k_{ip}/k_{pp})k_{jp} \quad (i=1,\dots,8; j=1,\dots,9; p=9) \quad (7)$$

Nota: quando $j = p$, $k'_{ij} = 0$

Considerando o termo genérico do triângulo superior k'_{rs} ($r < s$), tem-se

$$k'_{rs} = k_{rs} - \left(k_{rp} / k_{pp} \right) k_{sp} \quad (8)$$

O correspondente termo do triângulo inferior é

$$k'_{sr} = k_{sr} - \left(k_{sp} / k_{pp} \right) k_{rp} \quad (9)$$

Uma vez que $k_{rs} = k_{sr}$, conclui-se que

$$k'_{rs} = k'_{sr} \quad (10)$$

ou seja, na expressão (3), a submatriz 8 x 8 que é constituída pelas linhas e colunas de 1 a 8 é simétrica.

As componentes 1 a 8 do vector solicitação apresentam a seguinte expressão genérica

$$F'_i = F_i - \left(k_{ip} / k_{pp} \right) F_p \quad (11)$$

Procedendo de igual modo com a coluna 8 e depois com a coluna 7, chega-se a

$$\begin{bmatrix} k'''_{11} & k'''_{12} & k'''_{13} & k'''_{14} & k'''_{15} & k'''_{16} & 0 & 0 & 0 \\ k'''_{12} & k'''_{22} & k'''_{23} & k'''_{24} & k'''_{25} & k'''_{26} & 0 & 0 & 0 \\ k'''_{13} & k'''_{23} & k'''_{33} & k'''_{34} & k'''_{35} & k'''_{36} & 0 & 0 & 0 \\ k'''_{14} & k'''_{24} & k'''_{34} & k'''_{44} & k'''_{45} & k'''_{46} & 0 & 0 & 0 \\ k'''_{15} & k'''_{25} & k'''_{35} & k'''_{45} & k'''_{55} & k'''_{56} & 0 & 0 & 0 \\ k'''_{16} & k'''_{26} & k'''_{36} & k'''_{46} & k'''_{56} & k'''_{66} & 0 & 0 & 0 \\ k''_{17} & k''_{27} & k''_{37} & k''_{47} & k''_{57} & k''_{67} & k''_{77} & 0 & 0 \\ k'_{18} & k'_{28} & k'_{38} & k'_{48} & k'_{58} & k'_{68} & k'_{78} & k'_{88} & 0 \\ k_{19} & k_{29} & k_{39} & k_{49} & k_{59} & k_{69} & k_{79} & k_{89} & k_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1''' \\ F_2''' \\ F_3''' \\ F_4''' \\ F_5''' \\ F_6''' \\ F_7'' \\ F_8' \\ F_9 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Na subestrutura representada na Fig. 3, os graus de liberdade 1 a 6 são comuns a outras subestruturas ou estão ligados ao exterior, enquanto que os graus de liberdade 7 a 9 são interiores à subestrutura I. Por este motivo os graus de liberdade 1 a 6 permanecem na análise enquanto que os graus de liberdade 7 a 9 são removidos. Assim, aos primeiros está associado o índice *P* (permanecem) e aos últimos o índice *R* (removidos). A equação (12) pode ser escrita considerando as seguintes submatrizes

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{PP} & \underline{K}_{PR} \\ \underline{K}_{RP} & \underline{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_P \\ a_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_P \\ \underline{F}_R \end{bmatrix} \quad (13)$$

ou

$$\tilde{K}_{PP} \tilde{a}_P + \tilde{K}_{PR} \tilde{a}_R = \tilde{F}_P \quad (14)$$

$$\tilde{K}_{RP} \tilde{a}_P + \tilde{K}_{RR} \tilde{a}_R = \tilde{F}_R \quad (15)$$

Uma vez que \tilde{K}_{PR} é uma matriz nula, tem-se

$$\tilde{K}_{PP} \tilde{a}_P = \tilde{F}_P \quad (16)$$

A matriz \tilde{K}_{PP} (6×6) é a matriz de rigidez de um elemento finito com as características da subestrutura I, quando apenas são considerados os graus de liberdade 1 a 6 (ver Fig. 4).

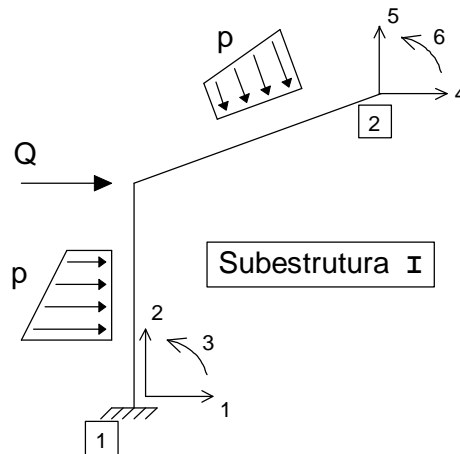


Fig. 4 - Elemento finito correspondente à subestrutura I.

O elemento finito representado na Fig. 4 tem uma matriz de rigidez que passa a designar-se \tilde{K}_I , um conjunto de deslocamentos \tilde{a}_I e um vector solicitação \tilde{F}_I , sendo

$$\tilde{K}_I = \tilde{K}_{PP} \quad (17)$$

$$\tilde{a}_I = \tilde{a}_P \quad (18)$$

$$\tilde{F}_I = \tilde{F}_P \quad (19)$$

A relação (16) passa a escrever-se

$$\tilde{K}_I \tilde{a}_I = \tilde{F}_I \quad (20)$$

Procedendo de um modo semelhante com a subestrutura II, obtém-se o elemento finito representado na Fig. 5, que apenas possui 9 graus de liberdade. Os graus de liberdade correspondentes ao nó 4 da Fig. 2 foram removidos.

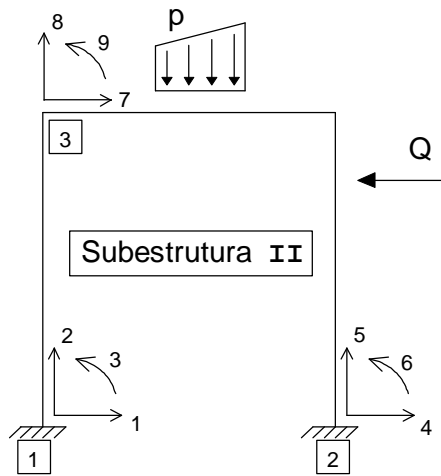


Fig. 5 - Elemento finito correspondente à subestrutura II.

Para a subestrutura II tem-se a seguinte relação que envolve 9 graus de liberdade

$$\underline{K}_{II} \underline{a}_{II} = \underline{F}_{II} \tag{21}$$

Assemblando as matrizes de rigidez e os vectores solicitação das duas subestruturas numa matriz de rigidez e vector solicitação globais, tem-se a seguinte relação que envolve 12 graus de liberdade

$$\underline{K}_G \underline{a}_G = \underline{F}_G \tag{22}$$

Esta relação corresponde à estrutura representada na Fig. 6

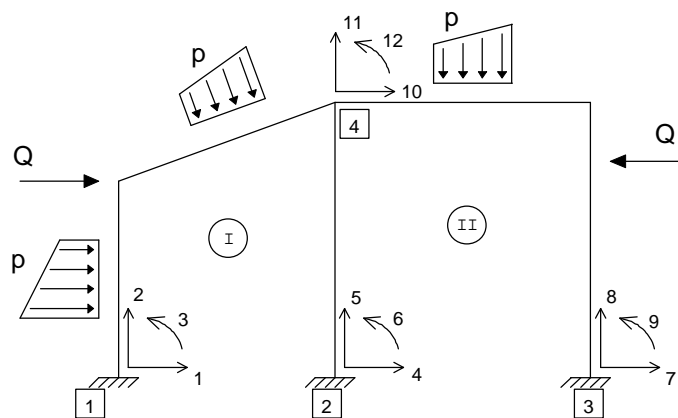


Fig. 6 - Assemblagem das duas subestruturas.

O sistema de equações lineares (22) deve ser resolvido atendendo às condições de apoio nos nós 1, 2 e 3. Depois de calculados os deslocamentos \underline{a}_G , ficam determinados os deslocamentos \underline{a}_I e \underline{a}_{II} .

No caso da subestrutura I, ficam assim calculados os deslocamentos \underline{a}_P . Recorrendo à equação (15), pode-se em seguida calcular os deslocamentos \underline{a}_R , resolvendo o seguinte sistema de equações lineares

$$\underline{K}_{RR} \underline{a}_R = \underline{F}_R - \underline{K}_{RP} \underline{a}_P \quad (23)$$

Uma vez que \underline{K}_{RR} é uma matriz triangular inferior, pode-se resolver (23) apenas com uma substituição progressiva, i.e., sem ser necessário realizar os cálculos correspondentes à fase de eliminação de Gauss.

Depois de calculados todos os deslocamentos em todas as subestruturas podem-se calcular os esforços nas barras do pórtico.

CONCLUSÃO

Em estruturas com um elevado número de graus de liberdade a condensação estática pode conduzir a uma grande economia de memória destinada ao armazenamento de matrizes, bem como a uma mais rápida resolução do problema. O sucesso deste procedimento depende do modo como se seleccionam as subestruturas. É também necessária uma renumeração criteriosa dos graus de liberdade de cada subestrutura, bem como da estrutura que resulta da assemblagem das subestruturas. A economia de memória resultante da condensação estática torna-se assim ainda mais evidente, devido ao facto de se minimizar a semibanda de cada uma das matrizes envolvidas. O tempo de resolução torna-se também menor porque se evitam cálculos desnecessários com elementos nulos.