

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Álvaro Azevedo

<http://www.alvaroazevedo.com>

Setembro 2017

Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto

Caso mais simples

- ◆ Método dos deslocamentos
- ◆ Comportamento linear elástico
- ◆ Pequenos deslocamentos
- ◆ Carregamento quase-estático

Estudos mais complexos

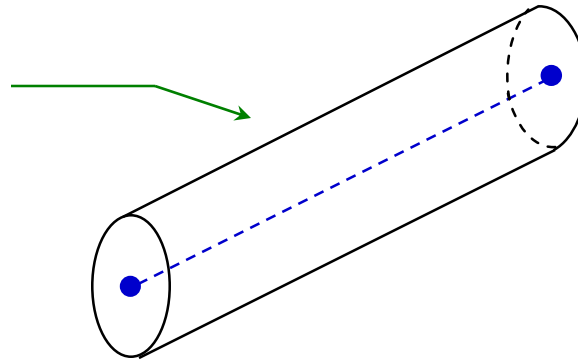
- ◆ Comportamento não-linear material
- ◆ Grandes deslocamentos
- ◆ Ações/comportamento dinâmico
- ◆ Instabilidade
- ◆ Interação sólido-fluido

Tipos de estrutura

- ◆ Reticuladas (treliças/pórticos)
- ◆ Laminares (paredes/lajes/cascas)
- ◆ Sólidos tridimensionais

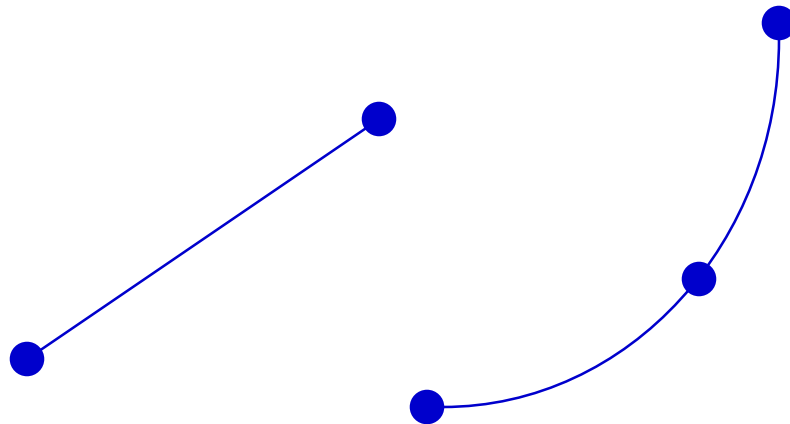
Estruturas reticuladas

Barras prismáticas



◆ Treliça 3D

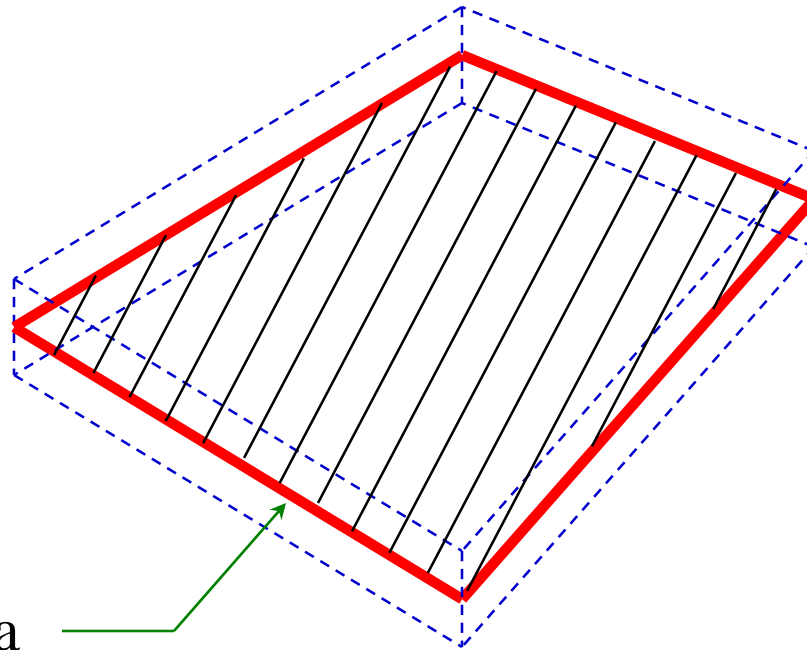
◆ Pórtico 3D



Elementos de 2 ou 3 nós

Estruturas laminares

- ◆ Paredes
- ◆ Lajes
- ◆ Cascas



h
pequeno

Superfície média

Estado plano de tensão

- ◆ Estrutura laminar
- ◆ Superfície média plana
- ◆ Ações/esforços de membrana, i.e., paralelos à superfície média

Ex: parede (*shear wall*)

Laje

- ◆ Estrutura laminar
- ◆ Superfície média plana
- ◆ Ações normais à superfície média
- ◆ Comportamento à flexão e corte

Ex: laje fungiforme

Casca

- ◆ Estrutura laminar
- ◆ Superfície média qualquer
- ◆ Ações quaisquer
- ◆ Comportamento de membrana, flexão e corte

Ex: cúpula esférica, edifício túnel

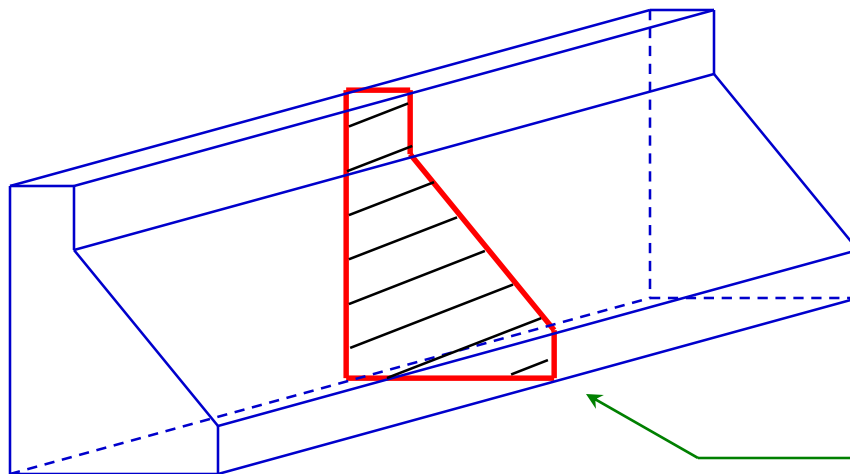
Estado plano de deformação

- ◆ Sólido estudado como um problema plano
- ◆ Superfície média plana
- ◆ Ações paralelas à superfície média
- ◆ Deformações desprezáveis na direção normal à superfície média (grande dimensão ou impedimento)

Ex: barragem gravidade, muro de suporte

Estado plano de deformação (cont.)

- ◆ Supõe-se que todos os deslocamentos são paralelos à superfície média
- ◆ Tensão normal à superfície média depende apenas das restantes tensões



Só a superfície
média é
discretizada

Superfície média

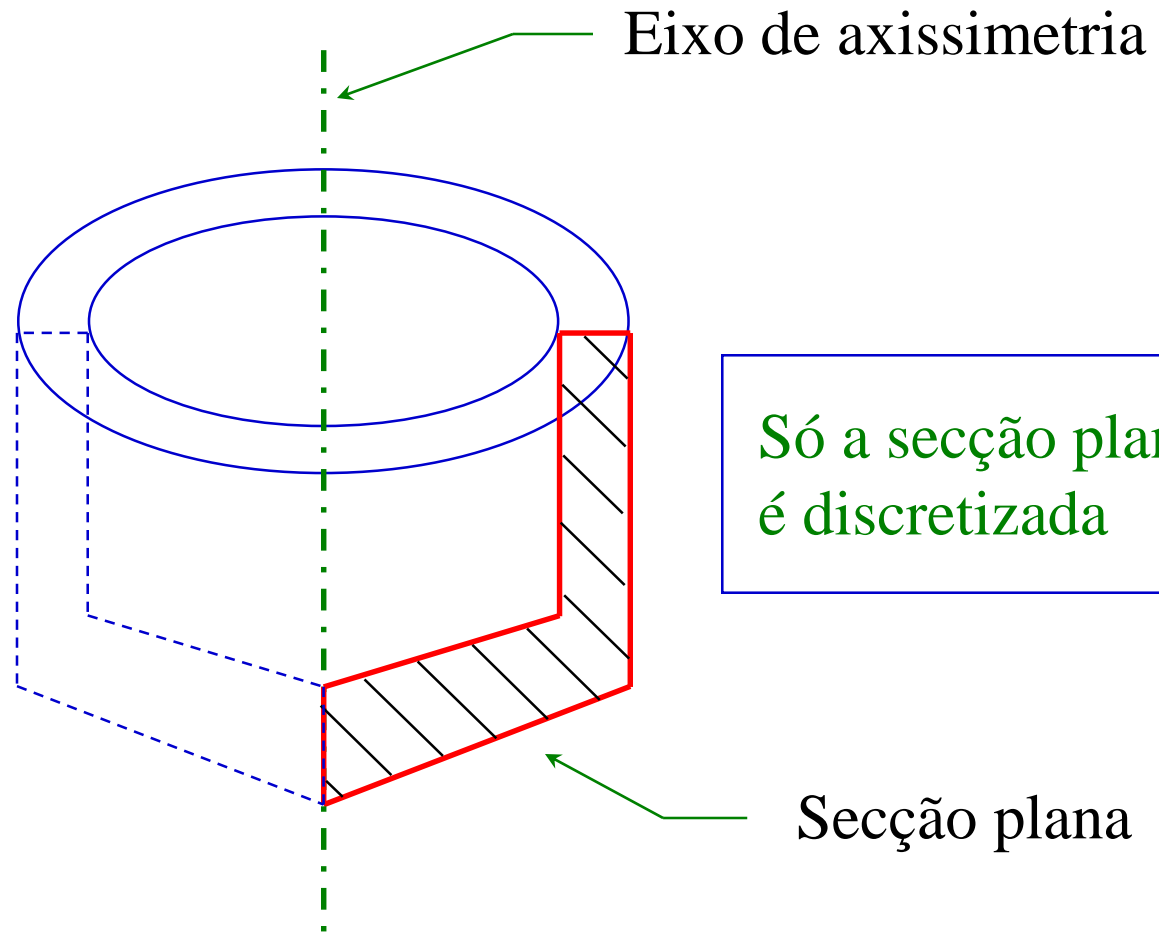
Estado axissimétrico

- ◆ Sólido de revolução
- ◆ Estuda-se uma secção plana
- ◆ Ações axissimétricas
- ◆ Deformações axissimétricas

Ex: depósito circular sujeito à
pressão hidrostática

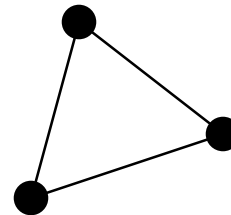
Estado axissimétrico (cont.)

Depósito circular



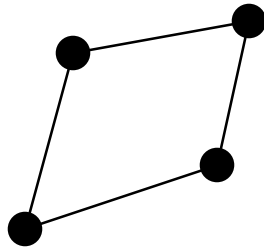
Elem. finitos para problemas planos

Elementos triangulares

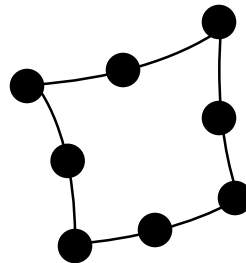


3 nós

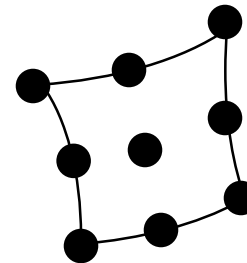
Elementos isoparamétricos



4 nós



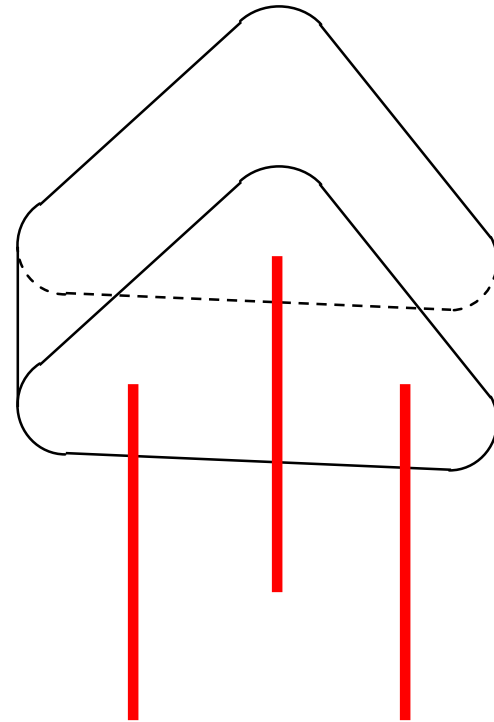
8 nós



9 nós

Caso geral

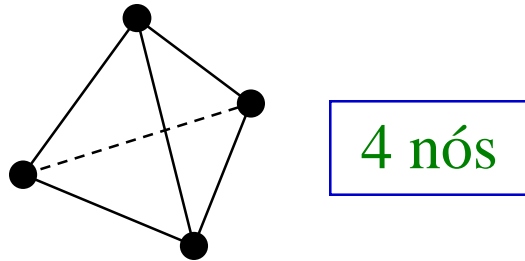
Sólido tridimensional



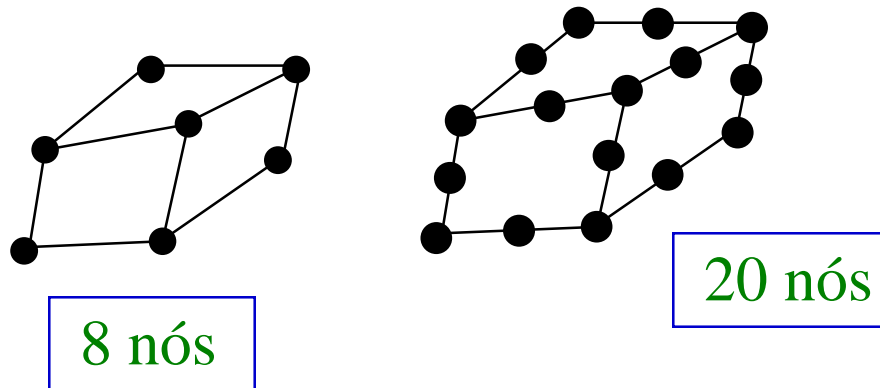
Ex: maciço de encabeçamento de estacas

Elementos finitos para sólidos 3D

Elementos tetraédricos



Elementos isoparamétricos



Ações em cada caso de carga

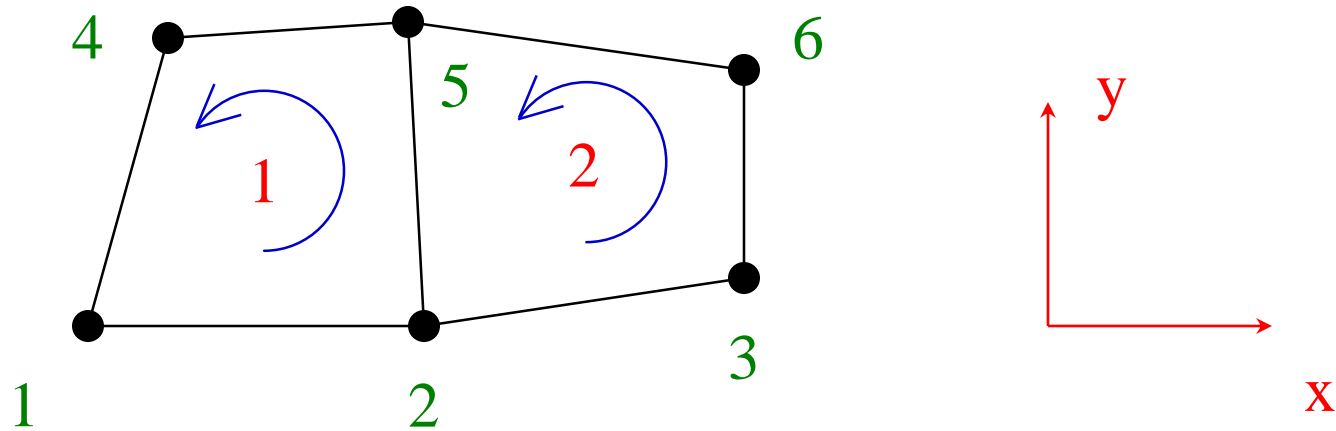
Nós	<ul style="list-style-type: none">•Forças concentradas *•Deslocamentos prescritos *
Elementos	<ul style="list-style-type: none">•Gravíticas *•Distribuídas *•Concentradas *•Térmicas

* Possui componentes em correspondência com os graus de liberdade (referencial depende do tipo de elemento)

Resolução de um problema

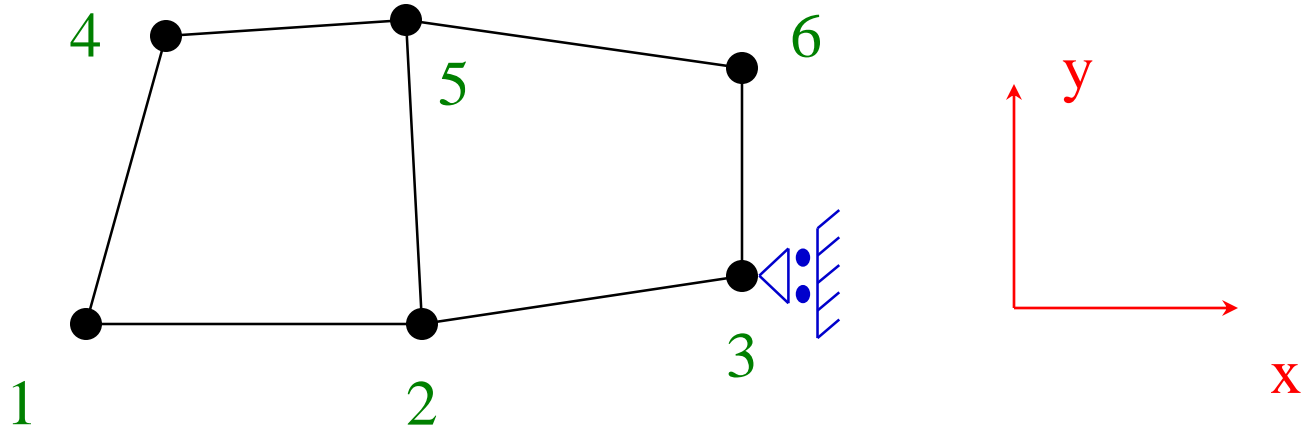
- ◆ Leitura e validação dos dados
- ◆ Cálculo das matrizes de rigidez dos elementos
- ◆ Cálculo das ações nodais equivalentes
- ◆ Assemblagem na matriz de rigidez global
- ◆ Introdução das condições fronteira
- ◆ Resolução do sistema de equações
- ◆ Cálculo dos esforços/tensões nos elementos

Dados - geometria



...
2 7 9 2 3 6 5 # Elemento 2 (material 7; secção 9)
...
...
5 -8.34 2.96 # Coordenadas (xy) do nó 5
...

Dados - apoios



...

#

x y

4

3

1 0 # 4° apoio - nó 3

...

1 - fixo
0 - livre

Dados - materiais, secções tipo

...

7	200000	0.3	25e-3	1e-5	#	Material 7
#	Mód. Young	Coef. Poisson	Peso esp.	Coef. dilat.		
#	(MPa)	(adim.)	(MN/m ³)	(°C ⁻¹)		

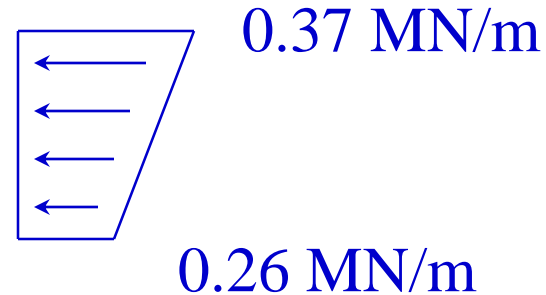
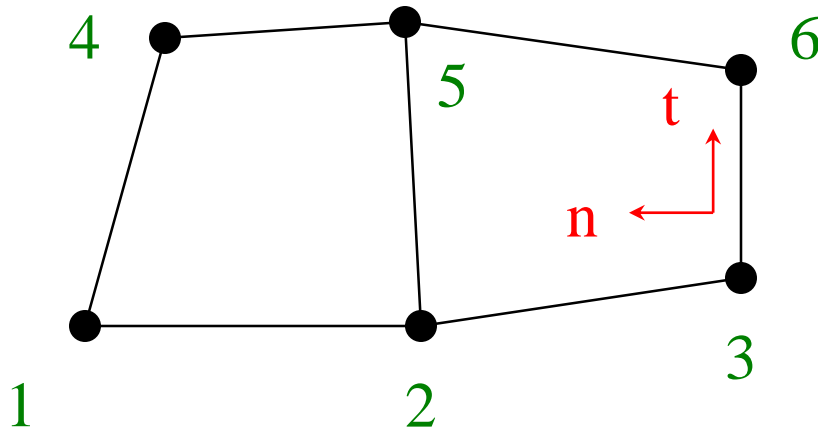
...

...

9	#	Secção tipo 9 - espessuras
1	0.35	# metros
2	0.45	
3	0.45	
4	0.35	

...

Dados - ações



...
 3 2 # 3ª carga distribuída - elemento 2
 # (t) (n)

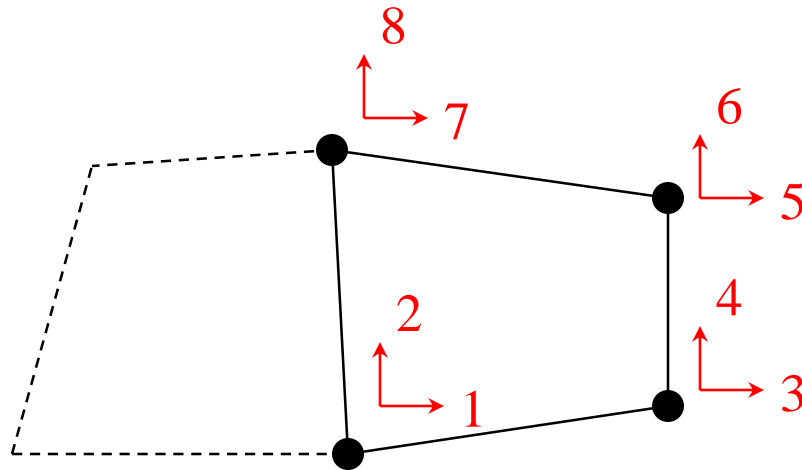
Nó 3:
 3 0.0 0.26 # MN/m

Nó 6:
 6 0.0 0.37

t - tangencial
 n - normal

...

Matriz de rigidez de um elemento

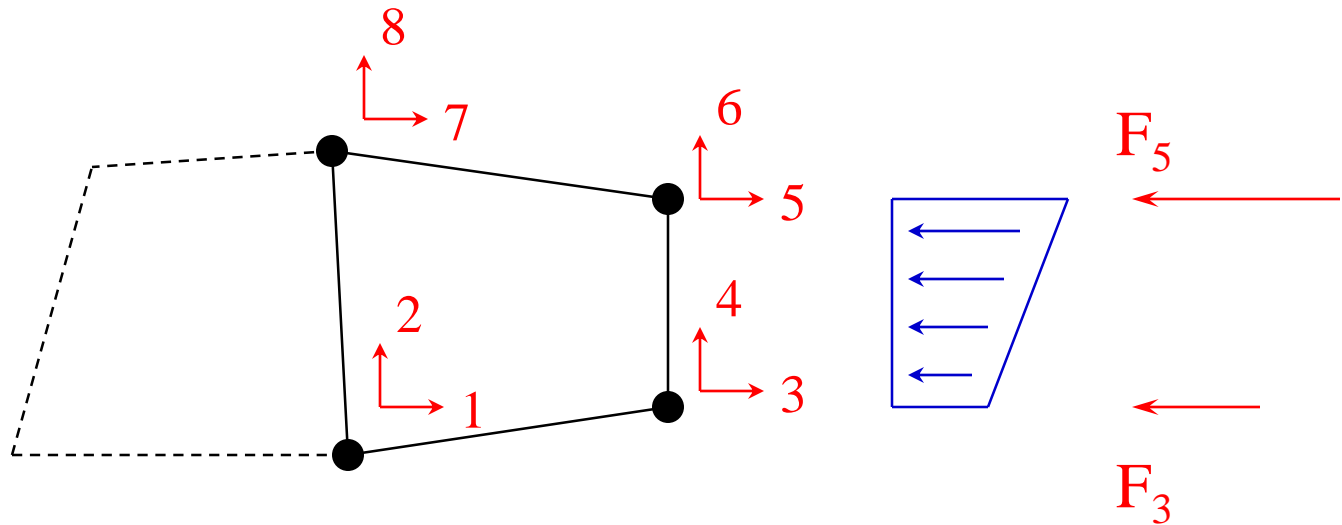


$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{18} \\ \vdots & K_{ij} & \vdots \\ K_{81} & \dots & K_{88} \end{bmatrix}$$

(8x8)
(Simétrica)

$K_{ij} \rightarrow$ Força aplicada segundo i quando o elemento está sujeito apenas a um deslocamento unitário segundo j

Ações nodais equivalentes

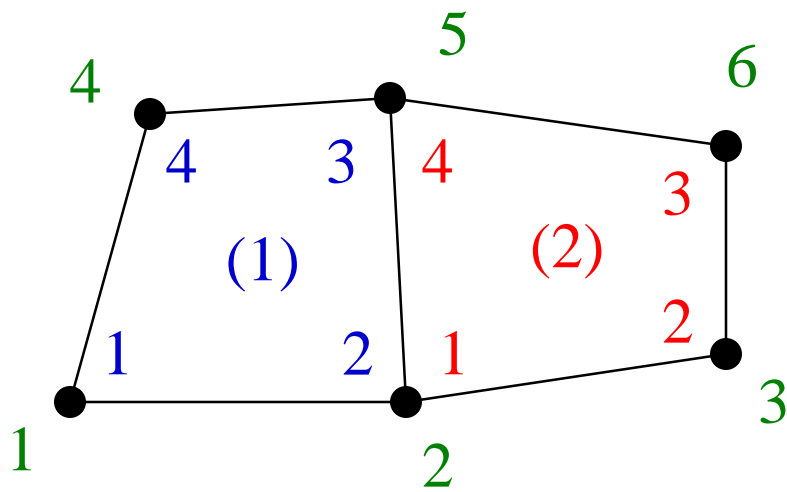


$$[F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_8 \end{bmatrix}$$

(8x1)

$[F] \rightarrow$ Forças nodais equivalentes a ações complexas

Assemblagem - mat. rig. global



A cada nó corresponde uma submatriz 2x2

	1	2	3	4	5	6
1	(1) 11	(1) 12		(1) 14	(1) 13	
2	(1) 21	(1) 22 (2) 11	(2) 12	(1) 24	(1) 23 (2) 14	(2) 13
3		(2) 21	(2) 22		(2) 24	(2) 23
4	(1) 41	(1) 42		(1) 44	(1) 43	
5	(1) 31	(1) 32 (2) 41	(2) 42	(1) 34	(1) 33 (2) 44	(2) 43
6		(2) 31	(2) 32		(2) 34	(2) 33

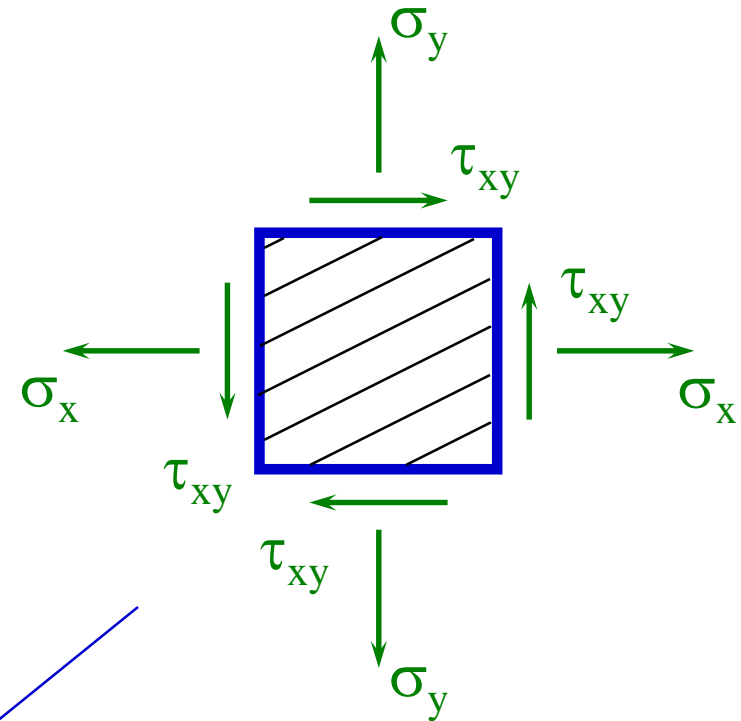
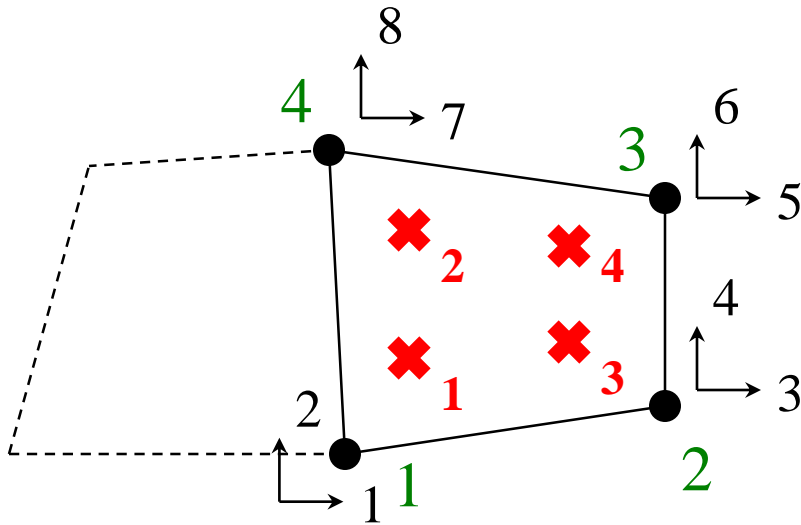
Introdução das condições fronteira

- ◆ Graus de liberdade com o deslocamento prescrito (nulo ou não nulo)
- ◆ A lista de deslocamentos prescritos não depende do caso de carga
- ◆ O valor do deslocamento prescrito pode variar com o caso de carga

Resolução do sistema de equações

Método direto	<ul style="list-style-type: none">• Eliminação de Gauss• Malhas de pequena e média dimensão
Método iterativo	<ul style="list-style-type: none">• Gradientes conjugados• Malhas de grande dimensão• Mais de 5000 equações

Cálculo das tensões num elemento

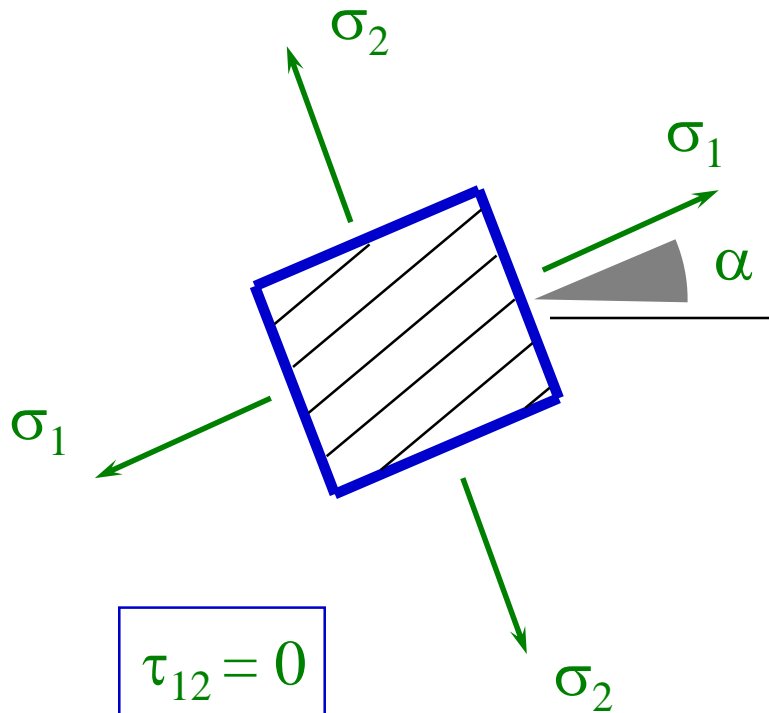


✖ → Ponto de Gauss

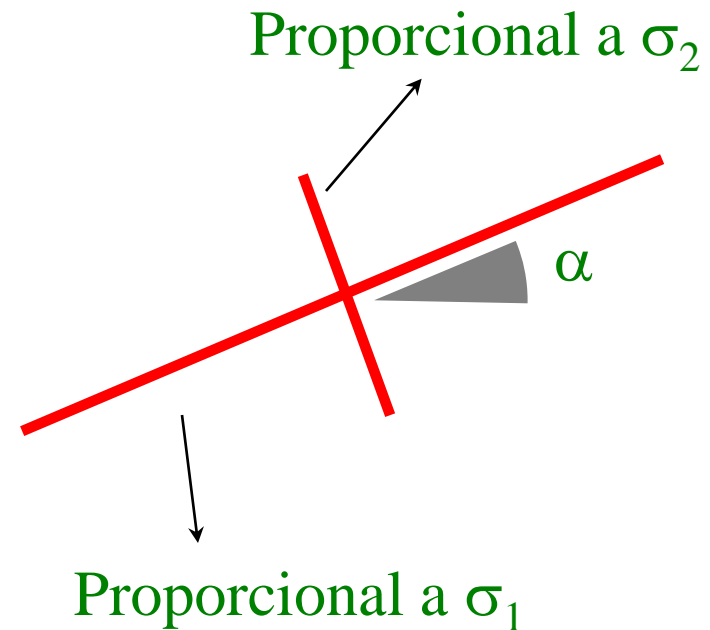
Elemento infinitesimal localizado em cada ponto de Gauss

Cálculo das tensões (cont.)

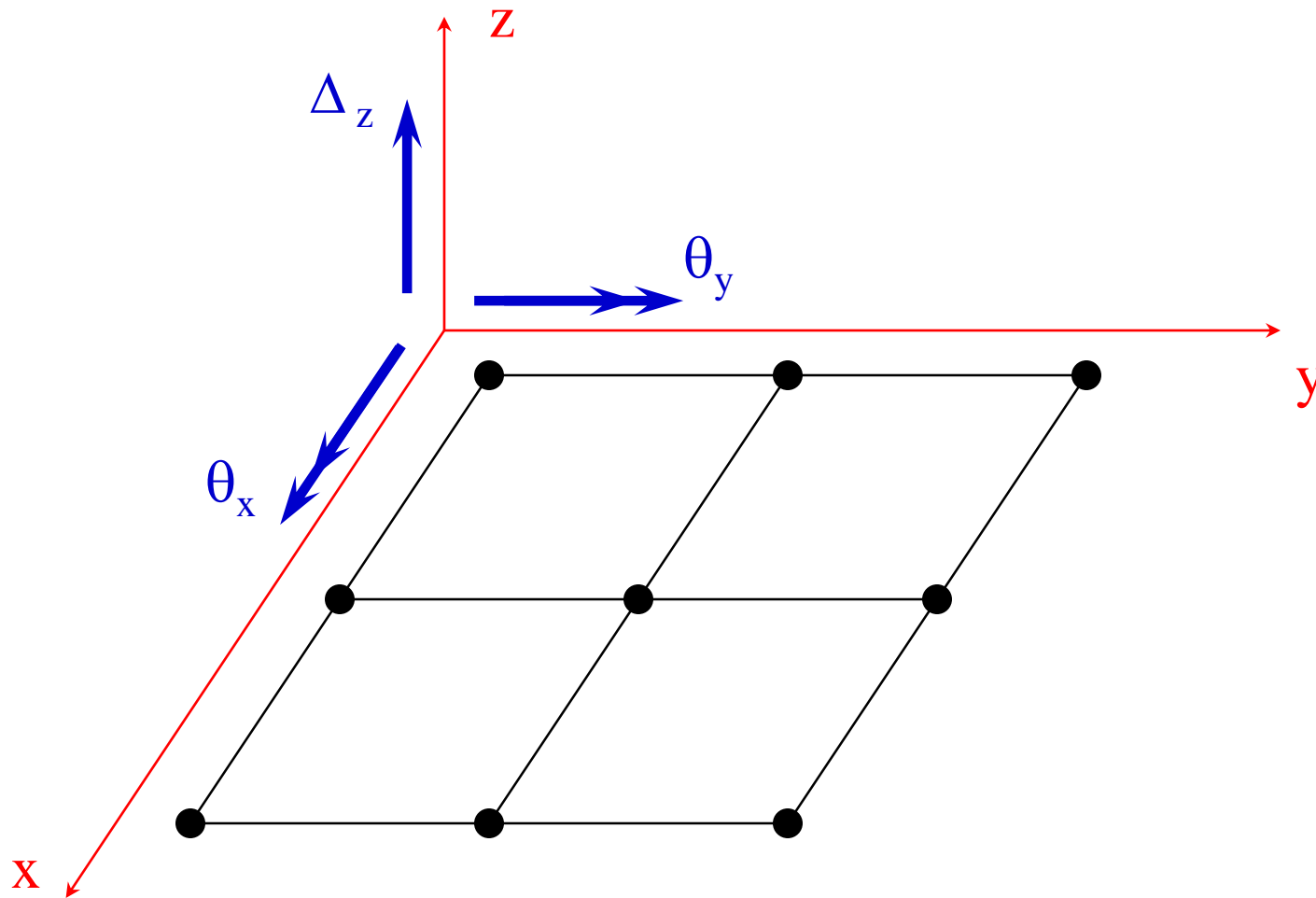
Tensões principais



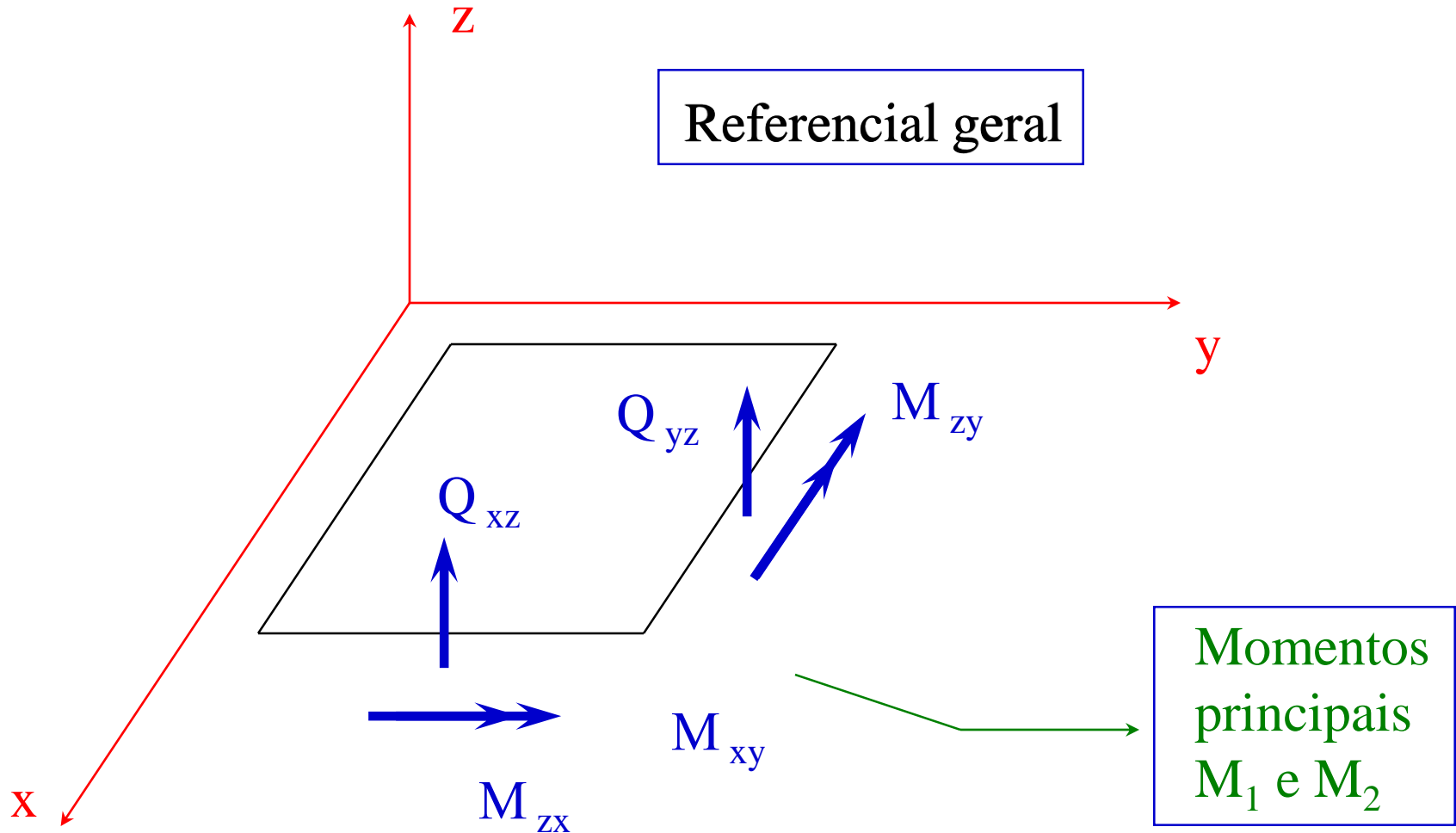
Representação gráfica por cruzetas



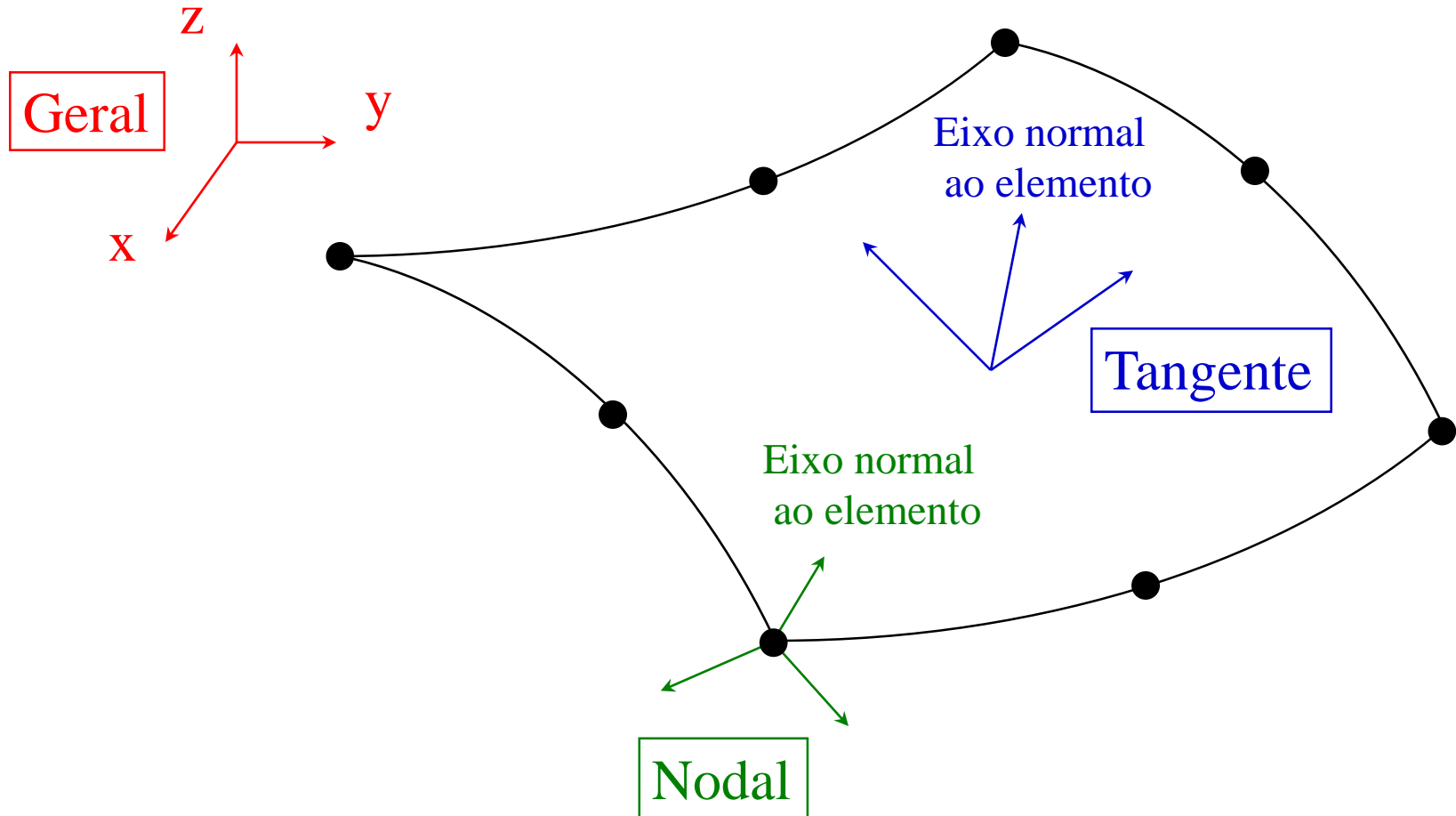
Lajes - graus de liberdade



Lajes - esforços em pontos de Gauss

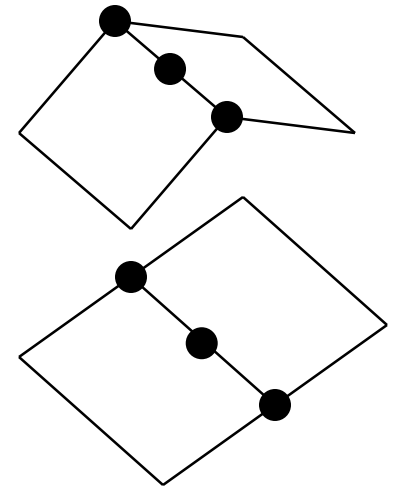


Cascas - referenciais



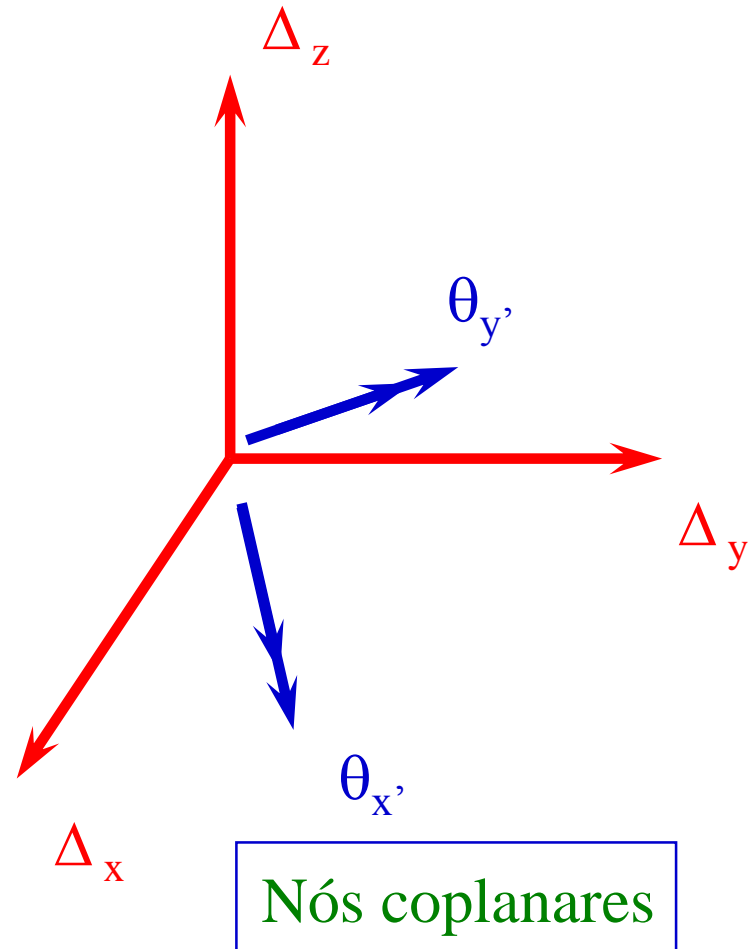
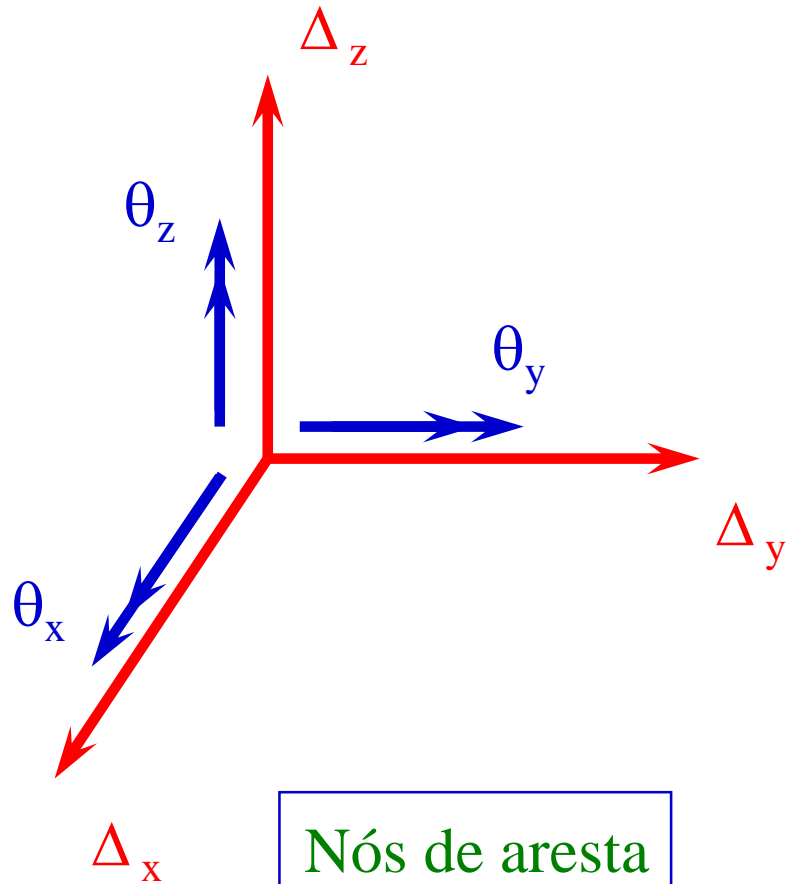
Cascas - graus de liberdade

- ◆ Deslocamentos nodais sempre no referencial geral
- ◆ Rotações nodais:
 - Nós de aresta → referencial geral
 - Nós coplanares → referencial nodal



Em nós coplanares só existem duas rotações

Cascas - graus de liberdade (cont.)



Cascas - esforços em p. de Gauss

- ◆ Referencial tangente
- ◆ Esforços de membrana, flexão e corte:

$N_{x'}$	$M_{z'y'}$	$Q_{x'z'}$
$N_{y'}$	$M_{z'x'}$	$Q_{y'z'}$
$N_{x'y'}$	$M_{x'y'}$	