

## MODELO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE POR PISO

Quando a estrutura de um edifício é constituída por uma associação de pórticos, paredes e lajes é possível basear o estudo do seu comportamento num modelo simplificado baseado nas seguintes hipóteses:

- a laje de cada piso constitui um diafragma indeformável;
- o contraventamento é realizado por estruturas planas situadas em planos verticais;
- estas estruturas podem ser pórticos, paredes ou associações pórtico/parede;
- admite-se que os elementos verticais de contraventamento apenas possuem rigidez quando solicitados paralelamente ao seu plano médio;
- a deformação do edifício pode ser caracterizada por três deslocamentos generalizados em cada piso (dois deslocamentos horizontais e uma rotação).

As estruturas planas situadas em planos verticais e que apenas possuem uma rigidez significativa quando solicitadas paralelamente ao seu plano médio (pórticos, paredes ou associações pórtico/parede) serão de aqui em diante designadas estruturas ticoidais [1].

Os núcleos resistentes que habitualmente correspondem a caixas de escadas ou de elevadores podem ser substituídos por estruturas ticoidais equivalentes, desde que a sua rigidez torcional seja também adicionada [1].

Na Figura 1 encontra-se representado um edifício de três pisos que apresenta as características atrás mencionadas.

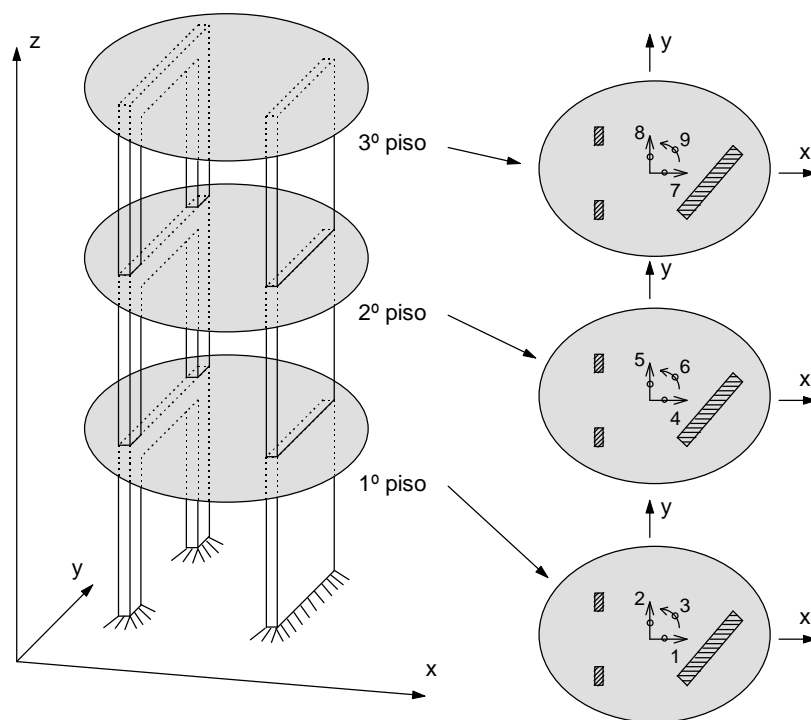


Fig. 1 - Estrutura de um edifício e graus de liberdade de cada piso.

A matriz de rigidez de cada estrutura ticoidal deve ser calculada tendo em consideração os graus de liberdade representados na Figura 2.

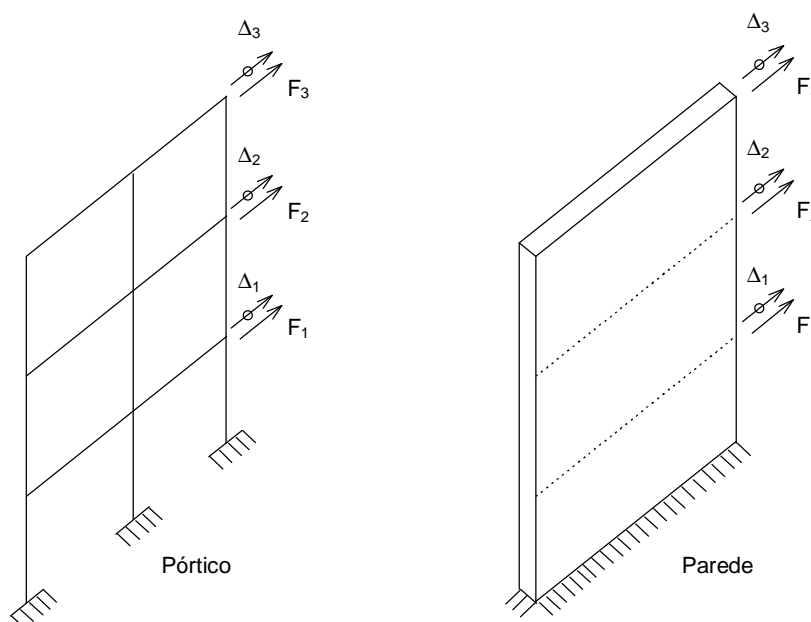


Fig. 2 - Graus de liberdade de cada estrutura ticoidal.

O cálculo da matriz de rigidez de uma estrutura ticoidal referida aos graus de liberdade representados na Figura 2 pode ser efectuado de diversos modos. São em seguida descritos três desses métodos.

### 1 - Condensação estática

A quase totalidade dos graus de liberdade do pórtico ou da parede são eliminados, restando apenas os que se encontram representados na Figura 2. Obtém-se assim uma matriz de rigidez 3x3.

### 2 - Método directo

Aplicando ao pórtico um conjunto de deslocamentos prescritos em que um deles é unitário e os restantes nulos, é possível obter directamente a matriz de rigidez 3x3 pretendida (ver Figuras 2 e 3).

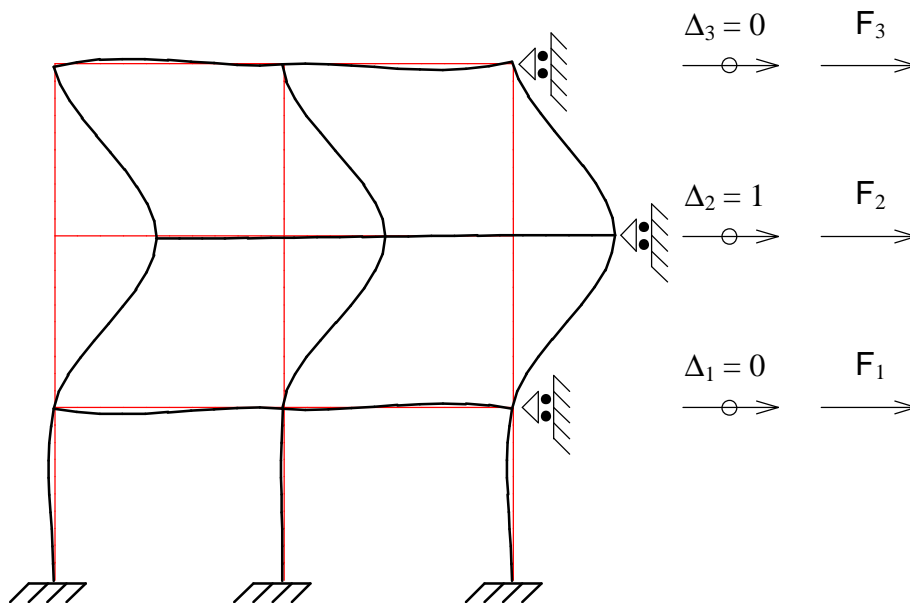


Fig. 3 - Pórtico deformado pela acção de deslocamentos prescritos.

Na Figura 3 está representada a deformada correspondente à imposição de um deslocamento unitário segundo o grau de liberdade nº 2, sendo nulos os deslocamentos segundo os graus de liberdade 1 e 3. As forças que fixam os nós nas posições prescritas correspondem à segunda coluna da matriz de rigidez 3x3. Esta afirmação é justificada com a seguinte equação

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

sendo obviamente

$$\begin{aligned} k_{12} &= F_1 \\ k_{22} &= F_2 \\ k_{32} &= F_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Os restantes elementos da matriz de rigidez 3x3 obter-se-iam de um modo semelhante. No caso geral a relação de rigidez correspondente a cada estrutura ticoidal é

$$\tilde{K}_t \tilde{\Delta} = \tilde{F} \quad (3)$$

### 3 - Matriz de flexibilidade

Aplicando ao pórtico uma única força unitária segundo o grau de liberdade nº 2 obtém-se a deformada representada na Figura 4.

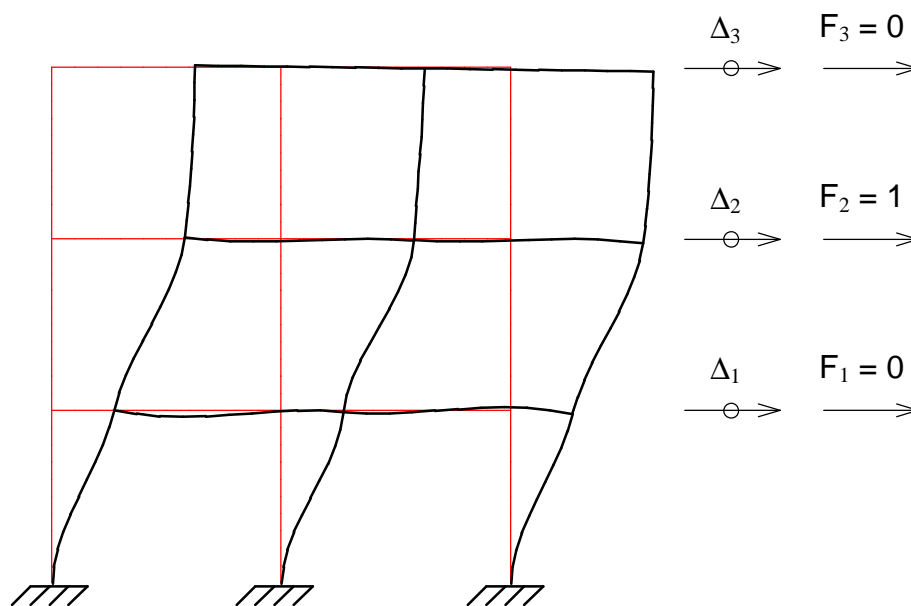


Fig. 4 - Pórtico deformado pela acção de uma força unitária.

Nestas circunstâncias a relação de flexibilidade é

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

sendo

$$\begin{aligned} q_{12} &= \Delta_1 \\ q_{22} &= \Delta_2 \\ q_{32} &= \Delta_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Assim se verifica que cada coluna da matriz de flexibilidade contém os deslocamentos obtidos por intermédio de acções unitárias em correspondência com os graus de liberdade considerados. No caso geral a relação de flexibilidade é

$$\underline{\underline{Q}}_t \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\Delta}} \quad (6)$$

sendo  $\underline{\underline{Q}}_t$  a matriz de flexibilidade da estrutura ticoidal.

A matriz de rigidez  $\underline{\underline{K}}_t$  obtém-se por inversão da matriz de flexibilidade.

$$\underline{\underline{K}}_t = \underline{\underline{Q}}_t^{-1} \quad (7)$$

As matrizes de rigidez e de flexibilidade são simétricas.

## CONTRIBUIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UMA ESTRUTURA TICOIDAL PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ DO EDIFÍCIO

A matriz de rigidez de cada estrutura ticoidal ( $\underline{\underline{K}}_t$ ) apenas refere os graus de liberdade representados na Figura 2. Para que seja possível reunir as contribuições das diversas estruturas ticoisdais na matriz de rigidez global do edifício, é necessário relacionar os graus de liberdade representados na Figura 1 com os representados na Figura 2. Antes de se estabelecer esta relação é necessário definir a distância da origem do referencial ao plano médio de cada estrutura ticoidal. Na Figura 5 encontra-se representada em planta uma parede que contém o ponto  $P$  e se encontra inclinada  $\alpha$  em relação ao eixo  $x$ .

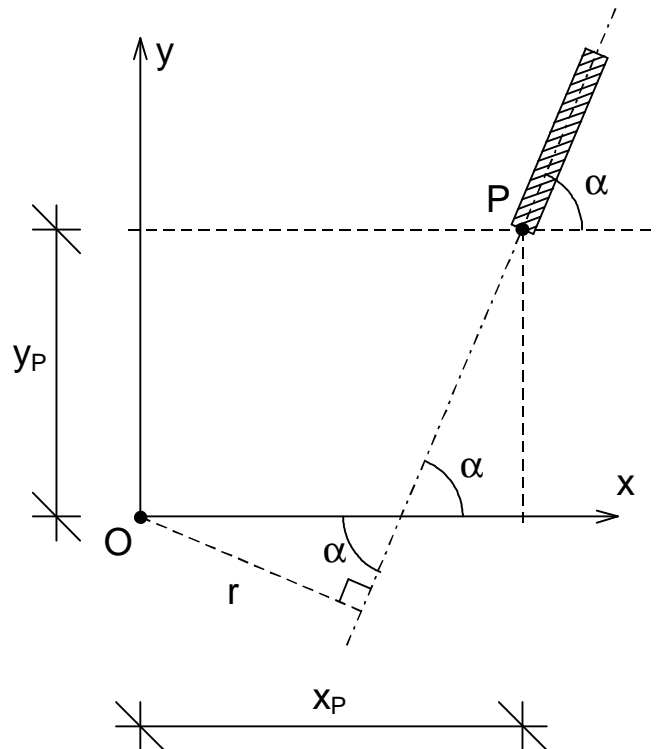


Fig. 5 - Distância da origem ao plano médio da estrutura ticoidal ( $r$ ).

A expressão que fornece a distância da origem do referencial ao plano médio da parede ( $r$ ) pode ser deduzida do seguinte modo

$$\frac{r}{\sin \alpha} + \frac{y_p}{\tan \alpha} = x_p \quad (8)$$

Multiplicando ambos os membros por  $\sin \alpha$  chega-se a

$$\frac{r}{\sin \alpha} \sin \alpha + y_p \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin \alpha = x_p \sin \alpha \quad (9)$$

$$r = x_p \sin \alpha - y_p \cos \alpha \quad (10)$$

Na Figura 6 encontram-se representados os três deslocamentos generalizados do 1º piso ( $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{d}$ ), bem como o deslocamento horizontal da estrutura ticoidal também ao nível do 1º piso e paralelamente ao seu plano médio ( $\Delta_1$ ).

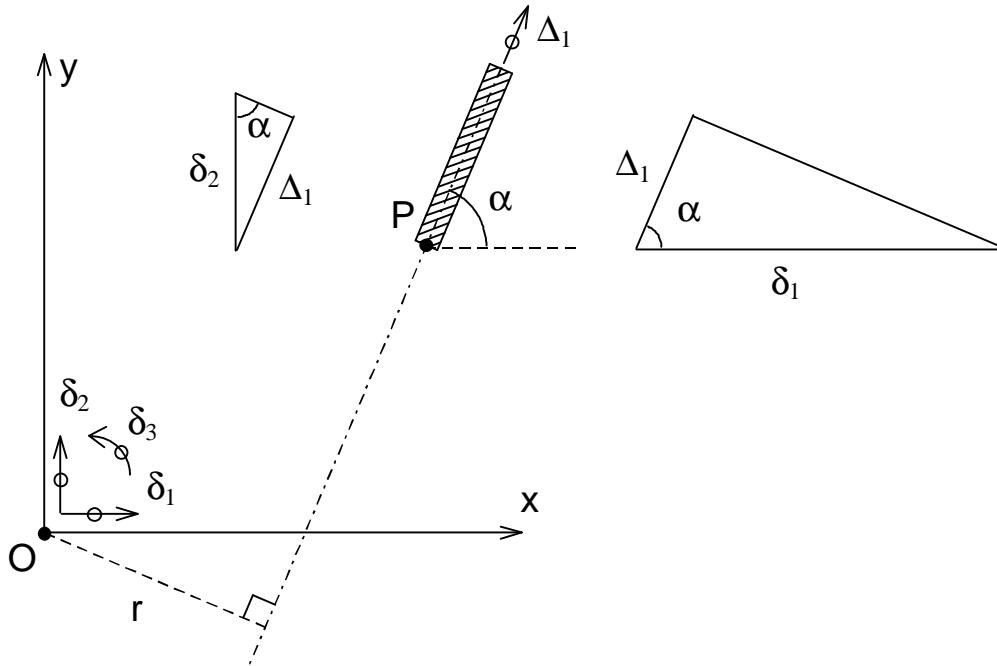


Fig. 6 - Deslocamentos do 1º piso e correspondente deslocamento da estrutura trapezoidal.

Para um dado conjunto de deslocamentos de piso ( $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ ), é o seguinte o deslocamento da estrutura trapezoidal ( $\Delta_1$ )

$$\Delta_1 = d_1 \cos \alpha + d_2 \sin \alpha + r d_3 \quad (11)$$

Matricialmente tem-se

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Nos restantes pisos esta relação seria semelhante (ver Figura 7).

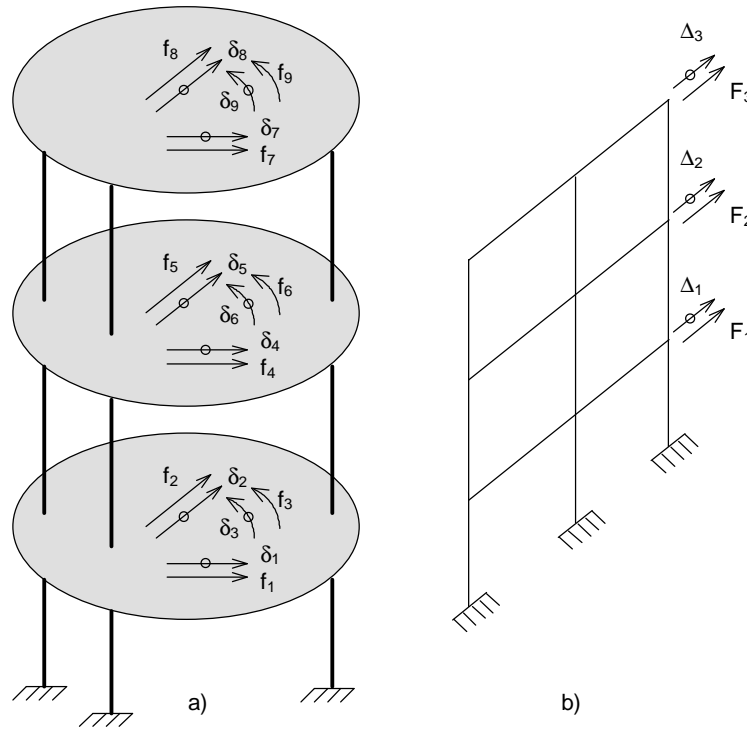


Fig. 7 - Forças e deslocamentos do edifício e de uma estrutura trapezoidal.

Agrupando as equações correspondentes a (12) numa única equação matricial que relaciona os deslocamentos indicados na Figura 7 obtém-se

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{a} & \sin \mathbf{a} & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \mathbf{a} & \sin \mathbf{a} & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \mathbf{a} & \sin \mathbf{a} & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \\ \mathbf{d}_5 \\ \mathbf{d}_6 \\ \mathbf{d}_7 \\ \mathbf{d}_8 \\ \mathbf{d}_9 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\underset{(3 \times 1)}{\Delta} = \underset{(3 \times 9)}{T} \underset{(9 \times 1)}{\mathbf{d}} \quad (14)$$

Na Figura 8 encontram-se representadas as forças generalizadas que actuam no 1º piso (\$f\_1, f\_2\$ e \$f\_3\$) e na estrutura trapezoidal. Em relação a esta última apenas se considera a força horizontal paralela ao plano médio (\$F\_1\$).



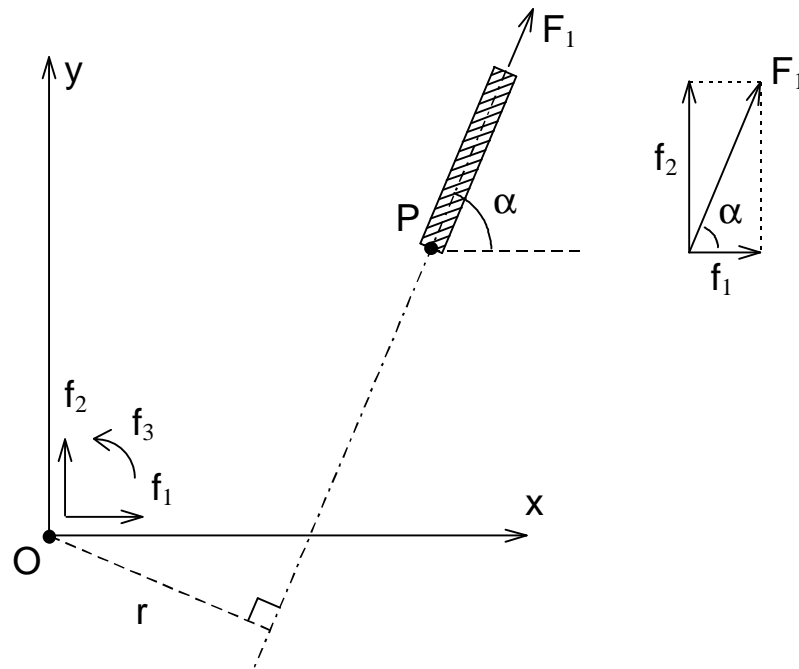


Fig. 8 - Forças generalizadas que actuam no 1º piso e na estrutura ticoidal.

As equações de equilíbrio que relacionam as forças representadas na Figura 8 são as seguintes

$$\begin{aligned}
 f_1 &= F_1 \cos \alpha \\
 f_2 &= F_1 \sin \alpha \\
 f_3 &= F_1 r
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Matricialmente tem-se

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ r \end{bmatrix} [F_1]
 \tag{16}$$

Agrupando as equações correspondentes aos três pisos obtém-se

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{a} & 0 & 0 \\ \sin \mathbf{a} & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \sin \mathbf{a} & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & \cos \mathbf{a} \\ 0 & 0 & \sin \mathbf{a} \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Nesta relação figura a transposta da matriz  $T$  que foi definida em (13) e (14).

$$\underset{(9 \times 1)}{\tilde{f}} = \underset{(9 \times 3)}{\tilde{T}^T} \underset{(3 \times 1)}{\tilde{F}} \quad (18)$$

De acordo com as forças e deslocamentos generalizados que se encontram representados na Figura 7 a) é possível estabelecer a seguinte relação de rigidez envolvendo os graus de liberdade de todos os pisos

$$\underset{(9 \times 9)}{\tilde{K}} \underset{(9 \times 1)}{\tilde{d}} = \underset{(9 \times 1)}{\tilde{f}} \quad (19)$$

A estrutura ticoidal representada na Figura 7 b) apresenta a seguinte relação de rigidez

$$\underset{(3 \times 3)}{\tilde{K}_t} \underset{(3 \times 1)}{\tilde{\Delta}} = \underset{(3 \times 1)}{\tilde{F}} \quad (20)$$

Atendendo a (14), (18), (19) e (20) tem-se sucessivamente

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{F} \quad (21)$$

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{K}_t \underset{\sim}{\Delta} \quad (22)$$

$$\underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{d} \quad (23)$$

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{K}_t \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{d} \quad (24)$$

Comparando (19) com (24) conclui-se que

$$\underset{(9 \times 9)}{\tilde{K}} = \underset{(9 \times 3)}{\tilde{T}^T} \underset{(3 \times 3)}{\tilde{K}_t} \underset{(3 \times 9)}{\tilde{T}} \quad (25)$$

Em (25) apenas uma estrutura ticoidal contribui para a matriz de rigidez do edifício. Para se obter a matriz  $K$  completa devem ser acumuladas em  $K$  as contribuições das diversas estruturas ticoidais.

Depois de resolvido o sistema de equações (19) é possível calcular as forças que actuam em cada estrutura ticoidal recorrendo à seguinte expressão que se obtém substituindo (23) em (22)

$$\tilde{F} = \tilde{K}_i \tilde{T} \tilde{d} \quad (26)$$

Considerando as forças  $F$  como solicitação, pode em seguida ser efectuada uma análise mais rigorosa de cada uma das estruturas ticoidais. Nesta análise devem ser considerados todos os graus de liberdade do pórtico ou da parede.

## CONCLUSÃO

O método de análise de edifícios aqui descrito é um método aproximado que permite obter resultados com um rigor aceitável sempre que a estrutura possua características que correspondam às hipóteses admitidas. Referem-se em seguida algumas situações que poderão dificultar a aplicação do modelo de três graus de liberdade por piso: pavimentos desnivelados, juntas de dilatação, estruturas ticoidais interrompidas nalguns pisos, edifícios com duas ou mais torres independentes, etc.

O modelo de três graus de liberdade por piso é útil em pré-dimensionamento, na análise dinâmica e sempre que não se disponham de meios de cálculo adequados a uma análise tridimensional sem simplificações da totalidade do edifício.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] - Joaquim Mateus Gonçalves Gomes - *Cálculo Integrado de Estruturas de Edifícios: Análise Estática e Dinâmica em Modelo Tridimensional* - Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1989.